Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. M. Kany

10. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Hauptachsentransformation, Skalarprodukte, Adjungierte und Definitheit

Aufgabe 1. ((Alleine) 2P + 2P)

a) Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ negativ definit, falls $x^t \cdot A \cdot x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{\underline{0}\}$ gilt. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist negativ definit.

(ii) $-A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist positiv definit.

(iii) Die k-ten Hauptminoren $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ erfüllen $\det(A_k) < 0$, falls $k \equiv 1 \pmod 2$ und $\det(A_k) > 0$, falls $k \equiv 0 \pmod 2$ gilt.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ gegeben durch

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$$

Zeigen Sie, dass A genau dann positiv definit ist, wenn $(-1)^j \cdot \alpha_j > 0$ für alle $j = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt.
Hinweis: Diagonalisieren Sie die Matrix A.

Aufgabe 2. ((Alleine) 2P +2P)

a) Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine reelle 3×3 Matrix sei die Bilinearform $\beta_A \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\beta_A(v, w) = v^t \cdot A \cdot w.$$

Für welche der nachfolgenden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert β_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Sei für $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ die Bilinearform $\beta_{\sigma,\tau} \colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\beta_{\sigma,\tau}(v, w) = v^t \begin{pmatrix} \sigma & \overline{\tau} \\ \tau & \sigma \end{pmatrix} \overline{w}.$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 25. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

(i) Wie müssen Sie $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ wählen, damit $\beta_{\sigma,\tau}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ definiert?

(ii) Seien nun $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass $(\mathbb{C}^2, \beta_{\sigma,\tau})$ einen Prähilbertraum bilden. Bestimmen Sie die zum Endomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad v \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot v$$

adjungierte lineare Abbildung $\varphi^* \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 2P +2P)

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum, $\phi \in \mathrm{End}(V)$, sowie $\phi^* \in \mathrm{End}(V)$ der adjungierte Endomorphismus zu ϕ bezüglich dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Wir definieren $\delta \in \mathrm{End}(V)$ durch $\delta := \phi \circ \phi^* + \phi^* \circ \phi$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Für den Kern von $\delta \in \mathrm{End}(V)$ gilt

$$\mathrm{Kern}(\delta) = \{v \in V |\ \forall w \in V:\ \langle \phi(v), \phi(w)\rangle + \langle \phi^*(v), \phi^*(w)\rangle = 0\}.$$

b) Für den Kern von $\delta \in \mathrm{End}(V)$ gilt die Identität $\mathrm{Kern}(\delta) = \mathrm{Kern}(\phi) \cap \mathrm{Kern}(\phi^*)$.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 1P+1P+2P)

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ zwei endlichdimensionale Prähilberträume.

a) (i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\beta\colon V \oplus W \times V \oplus W \longrightarrow \mathbb{K}$, definiert durch

$$\beta((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \langle v_1, v_2\rangle_V + \langle w_1, w_2\rangle_W$$

ein Skalarprodukt auf $V \oplus W$ definiert.

(ii) Bestimmen Sie die adjungierte Abbildung zur Projektion $\pi_V : V \oplus W \to V$, $\pi_V(v, w) = v$ bezüglich dem Skalarprodukt β aus Teil a).

b) **Erinnerung:** Der Sazt von Riesz besagt, dass die Abbildung

$$\Theta\colon V \longrightarrow V^*, \quad v \longmapsto L_v : u \mapsto \langle u, v\rangle_V$$

eine antilineare Bijektion ist.
Zeigen Sie mit Hilfe des Satz von Riesz, dass für eine lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ eine eindeutige lineare Abbildung $\psi\colon W \to V$ existiert, sodass

$$\langle \phi(v), w\rangle_W = \langle v, \psi(w)\rangle_V$$

für alle $v \in V,\ w \in W$ gilt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 25. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 5. (Keine Zusatzpunkte, aber dafür noch mehr Spaß bei der EM)

Am Samstag spielt die Nationalelf gegen Portugal im Rahmen der Fußball-Europameisterschaft. Denken Sie während der Partie über folgende Aussage nach:
Wird der Ball nach der Halbzeitpause auf den Mittelpunkt gelegt, so sind mindestens zwei Punkte auf dem Ball in der gleichen Position, wie zum Zeitpunkt des ersten Anstoß zu Matchbeginn.
Hinweis: Selbst Christiano Ronaldo kann den Ball nicht so schießen, dass er sich von Innen nach Außen stülpt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 25. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.