Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

11. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Singulärwertzerlegun, Pseudoinverse, Gruppenaktionen

Aufgabe 1. ((Alleine) 4P)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie eine Singulärwertzerlegung von A.

Aufgabe 2. ((Gruppe) 1P+1,5P+1,5P)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine reelle Matrix mit einer Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V$ und $A^+ := U^t\Sigma^+V^t$ eine Pseudo-Inverse.

a) Sei $Ax = b$ ein LGS das eine Lösung besitzt. Zeigen Sie, dass dann $x_s := A^+b$ eine Lösung des LGS ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto AA^+v$ die orthogonale Projektion (bezüglich dem Standardskalarprodukt) auf Bild(A) ist.

c) Sei U ein Untervektoraum von $\mathbb{R}^n$ und $\pi_U : \mathbb{R}^n \to U$ die orthogonale Projektion auf U. Sei weiterhin $v \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie, dass $\pi_U(v)$ der Vektor in U mit minimalem Abstand zu v ist, das heißt es gilt

$$\|\pi_U(v) - v\| = \min_{w\in U} \|w - v\|.$$

Folgern Sie hieraus, dass für ein unlösbares LGS $Ax = b$ die Pseudolösung $\tilde{x}_s := A^+b$ die Lösung bestmöglichst approximiert, d.h. es gilt $\|A\tilde{x}_s - b\| = \min_{x\in\mathbb{R}^m} \|Ax - b\|$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 07. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Alleine) 2P+2P+2Bonuspunkte)

a) Sei G eine Gruppe mit 21 Elementen die auf einer Menge X mit 11 Elementen operiert. Zeigen Sie, dass G mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein Element $x \in X$ sodass $g \bullet x = x$ für alle $g \in G$ gilt.

b) Sei G eine Gruppe die auf einer Menge X operiert und $x, y \in X$ in der gleichen Bahn. Zeigen Sie, dass die Fixgruppe $\mathrm{Stab}_G(x)$ isomorph zur Fixgruppe $\mathrm{Stab}_G(y)$ ist.

c) Ein Dodekaeder ist ein regelmäßiger 12-seitiger Würfel, bei dem jede Seite ein regelmäßiges Fünfeck ist. Berechnen sie die Größe der Symmetriegruppe des Dodekaeders, d.h. die Anzahl der Isometrien von $\mathbb{R}^3$ die den Dodekaeder auf sich selbst abbilden, mit Hilfe der Bahnbilanzformel.
Hinweis: Der Dodekaeder ist spiegelsymmetrisch.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 1P+1P+2P)

Sei K ein Körper und $n, r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq n$ zwei natürliche Zahlen. Wir bezeichnen mit

$$Gr(r, K^n) := \{V \mid V \text{ Untervektorraum von } K^n \text{ mit } \dim(V) = r\}$$

die Menge der r-dimensionalen Untervektorräume von K^n. Für die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren $n \times n$ Matrizen definieren die Gruppenaktion

$$\bullet : \mathrm{GL}_n(K) \times Gr(r, K^n) \to Gr(r, K^n) \quad , \quad (A, V) \mapsto A \bullet V := \{Av \mid v \in V\}.$$

a) Bestimmen Sie den Stabilisator von $V := \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ und die Anzahl der Bahnen der Aktion. Hierbei bezeichnet $\{e_1, \dots, e_n\}$ wie immer die Standardbasis.

b) Ist die Operation für $r \neq n$ treu? Begründen Sie wie immer Ihre Aussage.

c) Sei nun K ein Körper mit q Elementen. Zeigen Sie mithilfe der Bahnformel und Induktion, dass $\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ die Ordnung von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 07. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 5. ((Gruppe) 4 Bonuspunkte)

Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $\mathcal{U} := \{U \leq G\}$ die Menge aller Untergruppen von G. Wir betrachten die Abbildung

$$\kappa : G \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \quad , \quad (g, U) \mapsto \kappa_g(U) := \{g \star u \star g^{-1} \mid u \in U\}.$$

a) Seien $g \in G$ und $U \in \mathcal{U}$. Zeigen Sie, dass $\kappa_g(U)$ wieder eine Untergruppe von G ist und dass die Abbildung κ eine Gruppenaktion ist.

b) Eine Untergruppe $N \leq G$ heißt *Normalteiler* oder *normale Untergruppe*, wenn Sie unter Konjugation invariant bleibt, d.h. für den Stabilisator gilt $\mathrm{Stab}_G(N) = G$. Man schreibt dann auch $N \trianglelefteq G$. Eine Untergruppe N operiert auf G mittels Linksmultiplikation:

$$m : N \times G \to G \quad , \quad (n, g) \mapsto n \star g.$$

Sei nun $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, dass auf den Bahnen von m die Verknüpfung

$$Ng \circ Nh := N(g \star h)$$

wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von den gewählten Vertretern. Zeigen Sie weiterhin, dass die Menge der Bahnen mit der Verknüpfung „$\circ$" eine Gruppe bilden. Diese wird *Quotientengruppe* oder *Faktorgruppe* genannt und mit G/N bezeichnet.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 07. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.