Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. M. Kany

12. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Darstellungen, Ringe, euklidischer Algorithmus

Aufgabe 1. ((Gruppe) 1,5P+1,5P+1P)

Sei G eine Gruppe und V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Wir nennen einen Gruppenhomomorphismus $\rho\colon G \to \mathrm{Gl}_K(V)$ eine *irreduzible Darstellung*, wenn für jeden echten Untervektorraum $\{\underline{0}\} \subsetneq U \subsetneq V$ ein $g \in G$ existiert, sodass $\rho(g)U \not\subseteq U$ gilt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Sei G eine Gruppe und seien V, W zwei endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sind $\rho\colon G \to \mathrm{Gl}_K(V)$ und $\tau\colon G \to \mathrm{Gl}_K(W)$ zwei irreduzible Darstellungen und ist $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung, sodass

$$\varphi \circ \rho(g) = \tau(g) \circ \varphi$$

für alle $g \in G$ gilt, dann ist $\varphi = 0$, oder bijektiv.

b) Sei G eine Gruppe und V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Ist $\rho\colon G \to \mathrm{Gl}_K(V)$ eine irreduzible Darstellung und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ eine lineare Abbildung, sodass $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$ gilt, dann existiert ein $\lambda \in K$ mit $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.
Hinweis: Das charakteristische Polynom von φ zerfällt in Linearfaktoren über K.

c) Sei G eine abelsche Gruppe und V ein endlichdimensionaler nicht-trivialer Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Existiert eine irreduzible Darstellung $\rho\colon G \to \mathrm{Gl}_K(V)$, so gilt $\dim_K(V) = 1$.

Aufgabe 2. ((Alleine) 1P+1P+2P)

a) Gegeben seien die Polynome X^3-3X+2 und X^3+4X^2+5X+2 im Ring $\mathbb{Q}[X]$ der Polynome in einer Veränderlichen über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT:

$$g(X) = \mathrm{ggt}(X^3 - 3X + 2,\ X^3 + 4X^2 + 5X + 2)$$

Bestimmen Sie außerdem $p(X), q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$g(X) = p(X) \cdot (X^3 - 3X + 2) + q(X) \cdot (X^3 + 4X^2 + 5X + 2).$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 09. 07. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

b) (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$1 = a \cdot 31 + b \cdot 17.$$

Geben Sie außerdem ein Inverses von [17] in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times$ an.

(ii) Zeigen Sie: Ist (a, b) eine Lösung der Gleichung $1 = a \cdot 31 + b \cdot 17$, dann gilt für jede weitere Lösung $(\tilde{a}, \tilde{b})$: Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{a} = a + 17k$ und $\tilde{b} = b - 31k$.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 1P+1P+1P+1P)

Wir betrachten $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und betrachten die Ortohonormalbasis $B = \{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$ vermöge des Standard-Skalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \ \langle a + bi, c + di \rangle = ac + bd.$$

Die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ ist die übliche Norm auf $\mathbb{C}$. Betrachten Sie im Folgenden $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi |\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ den Ring der Gaußschen Zahlen.

a) Für $r \geq 0$ und $x \in \mathbb{C}$ sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{C} |\ |x - y| < r\}$ die Kugel um x mit Abstand r. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{C} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}[i]} B_1(z)$$

gilt.

b) Sei $x = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ und $r = |x| \geq 0$. Zeigen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

und alle $y \in \mathbb{C}$ die Identität $A \cdot B_1(y) = B_r(A \cdot y)$.

c) Sei $x \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $r = |x|$ und $\Gamma := \{z \cdot x |\ z \in \mathbb{Z}[i]\}$. Folgern Sie aus a) und b) die Identität

$$\mathbb{C} = \bigcup_{y \in \Gamma} B_r(y).$$

d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ mit der Bewertung $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$, $z \mapsto |z|^2$ ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 4. ((Alleine) 1P+1P+1P+1P+2Bonuspunkte)

Betrachten Sie die Pellsche Gleichung

$$X^2 - 5Y^2 = 1.$$

über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit üblicher Addition und Multiplikation.

a) Geben Sie eine Lösung $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ der Pellschen Gleichung an.

b) Betrachten Sie den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und die Abbildung

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{5} \longmapsto a^2 - b^2 5.$$

Zeigen Sie, dass N multiplikativ ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 09. 07. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

c) Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times$ von $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ die Identität

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times = \{r \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \mid N(r) = \pm 1\}$$

gilt.

d) Zeigen Sie, dass die Pellsche Gleichung unendlich viele Lösungen über $\mathbb{Z}$ besitzt.

e) Welche der folgenden Element $r_i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ $(i = 1, 2)$ sind irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$?

$$\text{(i) } r_1 = 19, \quad \text{(ii) } r_2 = 1 + 2\sqrt{5}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 09. 07. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.