Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

13. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Algebren, freie Moduln, Tensorprodukte von Moduln, Kategorien

Aufgabe 1. ((Alleine) 1,5P+1,5P+1P)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und G eine Gruppe. Wir definieren den *Gruppenring* als den R-Modul

$$R[G] := \mathrm{Abb}_0(G, R) := \{f : G \to R \mid f(x) \neq 0 \text{ für nur endliche viele } x \in G\}$$

der Abbildungen von G nach R mit endlichem Träger zusammen mit der Faltung:

$$\star : R[G] \times R[G] \to R[G] \quad , \quad (f, g) \mapsto f \star g \quad \text{mit } f \star g(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x).$$

a) Zeigen Sie, dass die Faltung genau dann kommutativ ist, wenn G abelsch ist.

b) Zeigen Sie, dass die Faltung R-linear ist, also $R[G]$ zusammen mit der Faltung eine R-Algebra mit Eins ist.

c) Für einen Gruppenautomorphismus $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ definieren wir die Abbildung

$$\phi^* : R[G] \to R[G] \quad , f \mapsto f \circ \phi.$$

Zeigen Sie, dass ϕ^* ein Algebrenhomomorphismus ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Umkehrabbildung ϕ^{-1} eines Gruppenautomorphismus wieder ein Gruppenhomomorphismus ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 16. 07. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 2. ((Gruppe) 4P+1Bonuspunkt)

a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen und $k := \mathrm{ggT}(n, m)$ ihr größter gemeinsamer Teiler. Zeigen Sie, dass dann die $\mathbb{Z}$-Moduln

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

isomorph sind.

b) Wir betrachten $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt ist, das heißt $\mathbb{Q}$ ist nicht das Erzeugnis von einer endlichen Teilmenge $X \subset \mathbb{Q}$. Ist $\mathbb{Q}$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul? Sie erhalten **1 Bonuspunkt** wenn Sie zeigen, dass jeder endlich erzeugte Untermodul von $\mathbb{Q}$ bereits von einem Element erzeugt wird und frei ist.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 4P)

Wir bezeichnen für zwei Moduln M, N wieder mit $M \oplus N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$ die direkte Summe der beiden mit komponentenweiser Verknüpfung.

a) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M, N zwei freie R-Moduln. Zeigen Sie, dass die Moduln $M \otimes_R N$ und $M \oplus N$ wieder freie R-Moduln sind.

b) Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ zusammen mit den R-Moduln $M := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ mit komponentenweiser Verknüpfung. Zeigen Sie, dass M und N nicht frei sind, aber $M \otimes_R N$ und $M \oplus N$ frei sind.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Identität $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ auch für R-Moduln gilt (s. Blatt 7 Aufgabe 5 b) für Vektorräume).

Aufgabe 4. ((Alleine) 4P)

a) Seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ drei Kategorien und $\mathcal{F} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ und $\mathcal{G} : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ zwei Funktoren.
Zeigen Sie, dass die Verkettung, d.h. Hintereinanderausführung, $\mathcal{H} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ der beiden Funktoren wieder ein Funktor ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $\mathcal{H}$ genau dann kontravariant ist, wenn genau einer der beiden Funktoren kontravariant ist.

b) Sei K ein Körper und $\mathcal{K} - \mathcal{VR}$ die Kategorie der K-Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Zeigen Sie, dass Dualisieren, d.h

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{D}: & \mathcal{K} - \mathcal{VR} & \to & \mathcal{K} - \mathcal{VR} \\ & \mathrm{Obj}(\mathcal{K} - \mathcal{VR}) \ni V & \mapsto & V^* := \mathrm{Hom}(V, K) \\ & \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \ni \varphi & \mapsto & \varphi^* \in \mathrm{Hom}(V_2^*, V_1^*) \text{ mit } \varphi^*(\alpha) = \alpha \circ \varphi \end{array}$$

ein Funktor der Kategorie $\mathcal{K} - \mathcal{VR}$ in sich selbst ist. Ist er ko- oder kontravariant?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 16. 07. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.