Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. M. Kany

14. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Kategorien, äußere Produkte und Zonsches Lemma

Aufgabe 1. (keine Punkte)

a) Sei K ein Körper und $K-VR^{fin}$ die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen und D der Dualisieren-Funktor (s. Blatt 13 Aufgabe 4 b)). Zeigen Sie, dass der Einsetzungshomomorphismus $V \to V^{**}, v \mapsto (\alpha_v : \phi \mapsto \phi(v))$ eine funktorielle Äquivalenz vom Identitätsfunktor zum Bidualisieren-Funktor $D \circ D$ ist. Was ändert sich, wenn wir dies auf der Kategorie $K - VR$ der K-Vektorräume betrachten?

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $F : \mathcal{C} \to \underline{Set}$ ein kovarianter Funktor mit darstellendem Objekt $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Zeigen Sie: Ist $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ ein weiteres darstellendes Objekt von F, dann gibt es einen Isomorphismus zwischen A und B.

Aufgabe 2. (keine Punkte)

Seien V, W zwei endlichdimensionale K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Der Homomorphismus φ induziert für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Homomorphismus

$$\bigwedge^k(\varphi) \colon \bigwedge^k(V) \longrightarrow \bigwedge^k(W), \quad \sum_i v_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge v_k^{(i)} \longmapsto \sum_i \varphi(v_1^{(i)}) \wedge \cdots \wedge \varphi(v_k^{(i)}).$$

a) Sei $\varphi_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung definiert durch $\varphi_A(v) = A \cdot v$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Berechnen Sie die Abbilddungsmatrix $D_{BC}(\bigwedge^2(\varphi_A))$ des Homomorphismus

$$\bigwedge^2(\varphi_A) \colon \bigwedge^2(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$$

bezüglich den Basen $B = \{e_i \wedge e_j \mid 1 \le i < j \le 4\}$ und $C = \{e_i \wedge e_j \mid 1 \le i < j \le 3\}$ in lexikographischer Reihenfolge.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind für den Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$:

(i) Es gilt $k \leq \operatorname{Rang}(\varphi)$.

(ii) $\bigwedge^k(\varphi)$ ist nicht die Nullabbildung.

Aufgabe 3. (keine Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $U \subseteq V$ ein nicht-trivialer Untervektorraum von V mit Basis $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset U$, so gilt

$$U = \{v \in V \mid v \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = 0\}.$$

b) Seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängige Vektoren in V. Es gilt:

$$\operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{Lin}(w_1, \ldots, w_m) \iff \exists \lambda \in K : \; v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \lambda \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$$

Aufgabe 4. (keine Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Mult}_K^n(V, K)$ die n-fachen Multilinearformen von V nach K und mit $\operatorname{Alt}_K^n(V, K)$ die n-fachen alternierenden Multilinearformen von V nach K. Zeigen Sie folgende K-Vektorraumisomorphien:

$$\text{(i) } T^n(V^*) \cong \operatorname{Mult}_K^n(V, K) \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \bigwedge^n(V^*) \cong \operatorname{Alt}_K^n(V, K)$$

Aufgabe 5. (keine Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $\phi \in \operatorname{End}_{R-\text{Modul}}(R^n)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) ϕ ist invertierbar, d.h. es existiert ein $\tilde{\phi} \in \operatorname{End}_{R-\text{Modul}}(R^n)$ mit $\phi \circ \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \circ \phi = \operatorname{id}_{R^n}$.

b) Für jedes $1 \leq k \leq n$ ist $\bigwedge^k(\phi) \in \operatorname{End}_{R-\text{Modul}}(\bigwedge^k R^n)$ invertierbar.

c) Es gilt $\det(\phi) \in R^\times$, also $\det(\phi)$ ist invertierbar in R.

d) ϕ bildet Basen auf Basen ab, d.h. ist $r_1, \ldots, r_n$ eine Basis von R^n, so ist auch $\phi(r_1), \ldots, \phi(r_n)$ eine Basis von R^n.

Aufgabe 6. (keine Punkte)

Ein *Graph* $\mathfrak{G}$ ist ein Paar (V, E), wobei die Menge der *Ecken* (*vertices*) V eine nichtleere Menge ist und $E \subseteq V \times V$ die Menge der *Kanten* (*edges*) von $\mathfrak{G}$ ist. Dabei können sowohl V, also auch E unendlich viele Elemente haben.
Wir nennen einen Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$ *zusammenhängend*, wenn je zwei Ecken von $\mathfrak{G}$ durch endlich viele Kanten in E verbunden werden können. Ein zusammenhängender Graph heißt *Baum*, wenn keiner der Knoten durch eine endliche Anzahl (echt größer Null) von paarweise verschiedenen

Kanten mit sich selbst verbunden werden kann.
Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Zorn, dass für jeden zusammenhängenden Graphen (V, E) ein Baum $(V, \tilde{E})$ existiert, der die selbe Menge von Ecken V und eine Teilmenge von Kanten $\tilde{E} \subset E$ von $\mathfrak{G}$ besitzt. Solch ein Baum wird auch *Spannbaum* von $\mathfrak{G}$ genannt.