Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

# 2. Übungsblatt zur Lineare Algebra II

Polynomring, Division mit Rest, Lemma von Bézout

**Aufgabe 1. ((Alleine) 2P+2P)**

Sei $\mathbb{R}[X]$ der Poylnomring über den reellen Zahlen. Finden Sie für die beiden folgenden Ideale $I_j \subseteq \mathbb{R}[X]$ $(j = 1, 2)$ einen Erzeuger $f_j(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $I_j = (f_j) = f_j \cdot \mathbb{R}[X]$.

$$\text{(i)} \quad I_1 = (X^3 + X + 1,\ X^3 + 1) \subseteq \mathbb{R}[X]$$
$$\text{(ii)} \quad I_2 = (X^3 - 1,\ X^2 + X - 2) \subseteq \mathbb{R}[X]$$

**Aufgabe 2. ((Alleine)1P+2P+1P)**

Sei $K$ ein Körper.

a) Zeigen Sie, dass im Polynomring $K[X]$ über $K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Identität
$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + \cdots + X + 1)$$
gilt.

b) Zeigen Sie, dass jedes Polynom $f \in K[X]$ von Grad $2 \leq \deg(f) \leq 3$ genau dann irreduzibel ist, wenn $f$ keine Nullstelle in $K$ hat.

c) Zeigen Sie, dass $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.
*Hinweis: Teil (a) und eine Zeichnung auf dem Einheitskreis könnten hilfreich sein.*

**Aufgabe 3. ((Gruppe) 1P+2P+1P)**

Sei $(R, +, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring mit Eins und sei $I \subseteq R$ ein Ideal.

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\mathfrak{R} \subseteq R \times R$ definiert durch
$$(r, s) \in \mathfrak{R} :\Longleftrightarrow\ (r - s) \in I$$
eine Äquivalenzrelation auf $R$ definiert. Zeigen Sie, dass für $r \in R$ die Äquivalenzklasse von $r$ gegeben ist durch die Menge $r + I := \{r + t |\ t \in I\}$.

b) Es bezeichne $R/I = \{r + I |\ r \in R\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{R}$. Wir definieren auf $R/I$ eine Addition $\oplus\colon R/I \times R/I \to R/I$ und eine Multiplikation $\odot\colon R/I \times R/I \to R/I$ durch
$$(r + I) \oplus (s + I) := (r + s) + I \quad \text{und} \quad (r + I) \odot (s + I) := (r \cdot s) + I.$$
Zeigen Sie, dass die Operationen $\oplus$ und $\odot$ wohldefiniert, also unabhängig vom gewählten Repräsentanten sind.

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 30. 04. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

c) Zeigen Sie, dass $(R/I, \oplus, \odot)$ wieder ein kommutativer Ring mit Eins bildet und geben Sie das Nullelement und das Einselement von $R/I$ an.

**Aufgabe 4. ((Gruppe) 2P+2P)**

Sei $K$ ein Köper. Wir bezeichnen mit $K[X]$ den Polynomring von $K$ in einer Variablen. Sei weiter $\{0\} \neq I \subseteq K[X]$ ein nicht-triviales Ideal und $(K[X]/I, \oplus, \odot)$ definiert wie in Aufgabe 3. Das Ideal $I \subseteq K[X]$ sei im Folgenden gegeben durch $I = \{h \cdot f_I |\ h \in K[X]\}$, wobei $f_I \in K[X]$ ein nicht-triviales Polynom von Grad $\deg(f_I) \geq 1$ ist.

a) Bestimmen Sie die Einheiten-Gruppe $(K[X]/I)^\times$ bezüglich $\odot$, das heißt die Elemente $(g+I) \in K[X]/I$, die ein Inverses bezüglich $\odot$ besitzen.

b) Zeigen Sie, dass genau dann $(K[X]/I, \oplus, \odot)$ ein Körper ist, wenn das Polynom $f_I \in K[X]$ irreduzibel ist.

*Hinweis: In beiden Aufgabenteilen ist das Lemma von Bézout hilfreich.*

**Aufgabe 5. ((Gruppe) 1P+1P+1P+1P=4Bonuspunkte)**

Sei $K$ ein Körper und $A$ eine $K$-Algebra. Für ein Element $a \in A$ sei

$$m_a : A \to A \quad , \quad x \mapsto a \bullet x$$

die Multiplikation von links mit $a$.

a) Zeigen Sie, dass $m_a$ ein Vektorraumhomomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$m : A \to \mathrm{End}_{K-VR}(A) \quad , \quad a \mapsto m_a$$

ein Algebrenhomomorphismus von $A$ in den Endomorphismenring von $A$ (als $K$-Vektorraum) ist.

c) Sei nun $A$ eine $K$-Algebra mit Eins und $\dim_{K-VR}(A) = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $A$ als Unteralgebra von $K^{n\times n}$ geschrieben werden kann und schreiben Sie die komplexen Zahlen als Unteralgebra von reellen Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}$.

d) Geben Sie ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ von Grad 2 mit $f(1 + 2i) = 0$ an.

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 30. 04. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.