Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

3. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Minimalpolynom, nilpotente Matrizen, Zerlegung in invariante Räume, Jordan-Normalform für Nilpotente

Während des gesamten Blattes sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 1. ((Alleine) 1P+1P+2P)

a) Sei $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ ein Endomorphismus und $g(X), h(X) \in K[X]$ zwei teilerfremde Polynome mit $g(\phi) \cdot h(\phi) = 0$ und $g(\phi) \neq 0 \neq h(\phi)$. Zeigen Sie, dass dann eine Basis B existiert, sodass die Darstellungsmatrix $D_{BB}(\phi)$ eine Blockdiagonalmatrix ist, d.h. es existieren $1 \leq k, m < n$ und Matrizen $A_1 \in K^{k\times k}, A_2 \in K^{m\times m}$ mit

$$D_{BB}(\phi) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben sei eine Blockdiagonalmatrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

Zeigen Sie, dass für das Verschwindungsideal $V(A) := \{f(X) \in K[X] \mid f(A) = 0\}$ bereits $V(A) = V(B) \cap V(C)$ gilt.

c) Gegeben sei die folgende Matrix über $\mathbb{C}$:

$$D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Minimalpolynom von D.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 07. 05. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 2. ((Alleine) 4P)

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei nilpotente Matrizen. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Summe $A + B$ ist nilpotent.

b) Das Produkt $A \cdot B$ ist nilpotent.

c) Die Transponierte A^t ist nilpotent.

d) Ist $f(X) \in K[X]$ ein Polynom mit $f(0) \neq 0$, dann ist $f(A)$ nilpotent.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 4P)

Gegeben sei die nilpotente reelle Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie zwei nichttriviale A-invariante Unterräume $U_1, U_2 \subsetneq \mathbb{R}^5$ an, die zueinander komplementär sind, d.h. es gilt $\mathbb{R}^5 = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe 4. ((Alleine) 4P)

a) Gegeben sei eine Matrix $A \in K^{6\times 6}$ mit Minimalpolynom $m_A(X) = X^3$ und $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$. Geben Sie die Jordan-Normalform von A an.

b) Gegeben sei eine Matrix $B \in K^{7\times 7}$ mit Minimalpolynom $m_B(X) = X^3$. Zeigen Sie, dass B höchstens Rang 4 hat. Welchen Rang hat B mindestens?

Aufgabe 5. ((Gruppe/Knobel) 1+3 Bonuspunkte)

Sei V ein K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit Minimalpolynom $m_\phi(X) \in K[X]$ von Grad d. Für einen Vektor $v \in V$ nennen wir den kleinsten ϕ-invarianten Untervektorraum $U \leq V$ der v enthält den von v ϕ-zyklisch erzeugten Untervektorraum.

a) Zeigen Sie dass alle ϕ-zyklisch erzeugten Unterräume höchstens Dimension d haben.

b) Zeigen Sie, dass ein ϕ-zyklisch erzeugter Untervektorraum von Dimension d existiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass sich jedes (normierte) Polynom $f(X)$ auf eindeutige Weise als endliches Produkt von (normierten) irreduziblen Polynomen schreiben lässt, d.h. es existieren irreduzible Polynome $g_1(X), \ldots, g_k(X)$ mit $f(X) = \prod_{i=1}^k g_i(X)$. Beachten Sie hierbei, dass die g_i nicht notwendigerweise unterschiedlich sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 07. 05. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.