Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

4. Übungsblatt zur Lineare Algebra II

Jordan-Normalform, Bilinearformen

Aufgabe 1. (Alleine, 2P+2P)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Jordannormalform $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Basiswechselmatrizen $S \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, die sie in Jordannormalform bringen, d.h mit $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$.

a) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

b) $$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Aufgabe 2. (Alleine, 2P+2P)

Wir können für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die verallgemeinerte Exponentialfunktion

$$\exp(A) := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k$$

definieren.
Einschub aus der Analysis: Der Limes macht für jede submultiplikative Norm auf dem $\mathbb{R}^{n\times n}$ Sinn. Diese sind alle ähnlich und machen $\mathbb{R}^{n\times n}$ zu einer Banachalgebra.

a) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

eine reguläre Matrix $S \in \mathrm{Gl}(3, \mathbb{R})$, sodass $A = S(D + N)S^{-1}$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N nilpotent mit $DN = ND$ ist.

b) Bestimmen Sie $\exp(A) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aus Aufgabenteil (a).

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 14. 05. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. (Gruppe, 3P+1P)

Sei K ein Körper.

a) Sei $J_n(\lambda) = J_n + \lambda I_n \in K^{n\times n}$ das Jordankästchen der Dimension n zum Eigenwert $\lambda \in K$. Bestimmen Sie alle regulären Matrizen $S \in \mathrm{Gl}(n,K)$, die mit $J_n(\lambda)$ kommutieren, das heißt, für die

$$S \cdot J_n(\lambda) = J_n(\lambda) \cdot S$$

gilt.

b) Seien für $i = 1,\dots k$ Jordan-Kästchen $J_{n_i}(\lambda_i) \in K^{n_i\times n_i}$ der Dimension $n_i \in \mathbb{N}$ zum Eigenwert $\lambda_i \in K$ gegeben. Dabei sollen die Eigenwerte paarweise verschieden sein, das heißt es gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Sei $n = \sum_{i=1}^k n_i$. Wir betrachten die Matrix $A \in K^{n\times n}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle regulären Matrizen $S \in \mathrm{Gl}(n,K)$, die mit A kommutieren, das heißt, für die $S \cdot A = A \cdot S$ gilt.

Aufgabe 4. (Gruppe, 4P)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv-definite Bilinearform. Seien weiter für $i = 1,\dots,k$ Vektoren $v_i \in V$ gegeben. Zeigen Sie folgende Aussage:
Die symmetrische $k \times k$ Matrix $(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ist genau dann regulär wenn die Vektoren $v_1,\dots,v_k \in V$ linear unabhängig in V sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 14. 05. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.