Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

5. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

multilineare Abbildung, Bilinearform, Gram-Matrix, Skalarprodukt, orthogonaler Raum

Während des gesamten Blattes sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 1. ((Gruppe) 1P+1P+2P)

a) Sei A eine K-Algebra. Zeigen Sie, dass die n-fache Multiplikation

$$m_n : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-mal} \to A \quad , \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

eine multilineare Abbildung ist.

Sei ab nun V ein K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to V$ eine bilineare Abbildung. Weiterhin seien

$$\gamma_1 : V \times V \times V \to V \quad , \quad (u, v, w) \mapsto \beta(u, \beta(v, w))$$
$$\gamma_2 : V \times V \times V \to V \quad , \quad (u, v, w) \mapsto \beta(\beta(u, v), w)$$

die beiden Abbildungen, die durch Verschachtelung von β entstehen.

b) Zeigen Sie, dass γ_1 eine multilineare Abbildung ist.

c) Wir betrachten auf V die Verknüpfung $v \star w := \beta(v, w)$. Zeigen Sie, dass dann $(V, +, \star)$ genau dann eine K-Algebra ist, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$ gilt.

Aufgabe 2. ((Alleine) 2P+2P+2P)

Sei $P_2 \subset \mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome von Grad kleinergleich 2. Wir betrachten die Abbildung:

$$\beta : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (f(X), g(X)) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

a) Zeigen Sie, dass β ein Skalarprodukt auf P_2 ist.

b) Berechnen Sie die Gram-Matrix von β bezüglich der Basis $(1, X, X^2)$.

c) Geben Sie eine Orthogonalbasis von P_2 bezüglich β an.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 21. 05. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Alleine) 2P)

Wir betrachten die beiden $\mathbb{R}$-Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}_b(\mathbb{Z},\mathbb{R}) &:= \{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \mid \exists\, C>0 : |f(k)|<C \text{ für alle } k\in\mathbb{Z}\} \\ \text{und } \mathrm{Abb}_0(\mathbb{Z},\mathbb{R}) &:= \{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \mid f(k)\neq 0 \text{ für nur endliche viele } k\in\mathbb{Z}\} \subset \mathrm{Abb}_b(\mathbb{Z},\mathbb{R}) \end{aligned}$$

der beschränkten Funktionen $\mathrm{Abb}_b(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ bzw. der Funktionen mit endlichen Träger $\mathrm{Abb}_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{R}$. Auf $\mathrm{Abb}_b(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ haben wir das Skalarprodukt (das müssen Sie nicht zeigen):

$$\langle f,g\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{f(k)g(k)}{k^2+1}$$

Bestimmen Sie den zu $\mathrm{Abb}_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ orthogonalen Raum $\mathrm{Abb}_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})^\perp$ in $\mathrm{Abb}_b(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Was ist der dazu orthogonale Raum $(\mathrm{Abb}_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})^\perp)^\perp$?

Aufgabe 4. ((Gruppe) 1P+3P)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass es einen Vektorraumhomomorphismus $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $\langle v,w\rangle = \psi(v)^t\psi(w)$ für alle $v,w\in V$ gilt.

b) Sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) Für alle $v\in V$ gilt $\langle v,v\rangle = \langle\phi(v),\phi(v)\rangle$. [1]

   (ii) Für alle $v,w\in V$ gilt $\langle v,w\rangle = \langle\phi(v),\phi(w)\rangle$.

Aufgabe 5. ((Gruppe/etwas knobelig) 4 Bonuspunkte)

a) Sei die Charakteristik $\mathrm{char}(K)\neq 2$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\beta : V\times V\to K$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, dass V eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ hat, deren Vektoren orthogonal zueinander sind, d.h. für $v_i\neq v_j$ gilt bereits $\beta(v_i,v_j)=0$. *Hinweis: Starten Sie mit einer beliebigen Basis und konstruieren Sie hieraus die gewünschte Basis. Passen Sie hierbei auf den Sonderfall $\beta(v,v)=0$ auf.*

b) Geben Sie eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{F}_2^n$ (für ein $n\in\mathbb{N}$ Ihrer Wahl) an, sodass $\mathbb{F}_2^n$ keine Orthogonalbasis wie in Teil a) besitzt.

[1] Das heißt ϕ ist eine Isometrie bezüglich der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 21. 05. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.