Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

6. Übungsblatt zur Lineare Algebra II

Linearformen, Dualraum und das Lemma von Riesz

Aufgabe 1. (Alleine, 2P+2P)

Es bezeichne $\mathbb{R}[X]$ wie üblich den Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir den Einsetzungshomomorphismus

$$A_a\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, \quad p \longmapsto p(a).$$

Es bezeichne nun $P_n := \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ den endlichdimensionalen Vektorraum der Polynome von Grad kleiner-gleich $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Einschränkung $\varphi_a := A_a|_{P_n}$ eine Linearform auf P_n.

a) Für P_3 mit der Standard-Basis $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ bezeichne B^* die dazu duale Basis. Für $a \in \{-1, 0, 1, 2\}$ Schreiben Sie φ_a als Linearkombination der Vektoren in B^*.

b) Betrachte P_2 und für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Abbildung

$$\int_a^b : P_2 \to \mathbb{R}, \quad p \longmapsto \int\limits_a^b p(x)\, dx.$$

und

$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=a} : P_2 \to \mathbb{R}, \quad p \longmapsto \left.\frac{d}{dx} p(x)\right|_{x=a}$$

Stellen Sie $\int_a^b, \frac{d}{dx}|_{x=a}, \varphi_a, \varphi_b \in P_2^*$ als Linearkombination der Basiselemente von B^* dar und bestimmen Sie eine nicht triviale Darstellung der Null für $a = 0$ und $b = 1$.

Aufgabe 2. (Alleine, 2P+2P)

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to K$ eine anisotrope Bilinearform.

a) Sei $n = \dim_K(V)$, $B \subseteq V$ eine Basis von V, $G \in K^{n\times n}$ die Gramsche-Matrix von β bezüglich B und $B^* \subseteq V^*$ die zu B duale Basis. Zeigen Sie, dass für die Abbildung

$$\Theta_\beta\colon V \longrightarrow V^*, \quad v \longmapsto L_v := \beta(\cdot, v)$$

die folgenden Identitäten gelten:

(i) $D_{B^*B}(\Theta_\beta) = G$ und

(ii) $D_{B^*}(L_v) = G \cdot D_B(v)$ für alle $v \in V$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 28. 05. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

b) Sei nun $V = K^3$. Für beliebig vorgegebene Vektoren $v, w \in K^3$ ist die Abbildung

$$f_{v,w} \colon K^3 \longrightarrow K, \quad z \longmapsto \det(M(v,w,z))$$

eine Linearform (hier ist $M(v,w,z) \in K^{3\times 3}$ die Matrix mit den Vektoren $v, w, z \in \mathbb{R}^3$ in den Spalten). Nach dem Satz von Riesz gibt es einen eindeutigen Vektor $u(v,w) \in K^3$ mit $f_{v,w} = L_{u(v,w)}$. Dabei ist $L_{u(v,w)} \colon K^3 \to K$ die Linearform definiert durch $L_{u(v,w)}(z) := \beta(u(v,w), z)$.
Berechnen Sie für das Standard-Skalarprodukt, die Standard-Basis auf $\mathbb{R}^3$ und beliebig vorgegebene Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ den Vektor $u(v,w) \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. (Gruppe, 2P+1P+1P)

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir definieren den *Annulator* $U^0 \subseteq V^*$ von U als

$$U^0 = \{f \in V^* | \; f(u) = 0 \; \forall u \in U\}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt $\dim_K(U^0) = \dim_K(V) - \dim_K(U)$.

b) Für Untervektorräume $U_1, U_2 \leq V$ gilt:

(i) $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.

(ii) $(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$.

Aufgabe 4. (Gruppe, 1P+1P+2P)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta \colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V. Wir verwenden die Identifizierung $V \simeq V^{**}$ durch den Isomorphismus

$$\psi \colon V \longrightarrow V^{**}, \quad v \longmapsto (A_v \colon w^* \mapsto w^*(v)).$$

aus der Vorlesung. Sie wissen bereits, dass der Homomorphismus

$$\Theta_\beta \colon V \longrightarrow V^*, \quad v \longmapsto \beta(v, \cdot)$$

nach dem Satz von Riesz ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ eine Orthonormal-Basis und $B^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subseteq V^*$ die dazu duale Basis, so gilt $\Theta_\beta(b_i) = b_i^*$ für $i = 1, \dots, n$.

b) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt $\Theta_\beta(U^\perp) = U^0 \subseteq V^*$. Dabei bezeichnet $U^0 \subseteq V^*$ den Annulator von $U \subseteq V$ aus Aufgabe 3.

c) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt $\psi(U^\perp) = \Theta_\beta(U)^0 \subseteq V^{**}$. Dabei bezeichnet $U^\perp \subseteq V$ das orthogonale Komplement von U in V und $\Theta_\beta(U)^0 \subseteq V^{**}$ den Annulator von $\Theta_\beta(U) \subseteq V^*$ in $V^{**} = (V^*)^*$ aus Aufgabe 3.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 28. 05. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 5. (Alleine, 4 Bonuspunkte)

Sei K ein Körper und V, W zwei beliebige K-Vektorräume (d.h. der Fall $\dim_K(V) = \infty$, oder $\dim_K(W) = \infty$ ist erlaubt). Sei weiter $\phi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und

$$\phi^*\colon W^* \longrightarrow V^*, \quad f \longmapsto f \circ \phi$$

die zu $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ duale Abbildung $\phi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) ϕ ist genau dann surjektiv, wenn ϕ^* injektiv ist.

b) ϕ ist genau dann injektiv, wenn ϕ^* surjektiv ist.

Hinweis: Sie dürfen hier Basisergänzung und lineare Fortsetzung für Homomorphismen wie im endlichdimensionalen Fall benutzen. Wir werden dies im Verlauf der Vorlesung mit dem Lemma von Zorn für unendlich-dimensionale Vektorräume zeigen.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 28. 05. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.