Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart
M.Sc. M. Kany

7. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Tensorprodukt, Skalarprodukt

Aufgabe 1. (Alleine,1P+1P+2P)

a) Gegeben seien die beiden Abbildungen

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v, \quad \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v$$

Geben Sie die Darstellungsmatrix von $\phi \otimes \psi$ bezüglich Basen Ihrer Wahl an.

b) Seien $\phi \in \mathrm{End}(V)$ und $\psi \in \mathrm{End}(W)$ zwei Endomorphismen und v, w Eigenvektoren von ϕ und ψ. Zeigen Sie, dass dann auch $v \otimes w$ ein Eigenvektor von $\phi \otimes \psi$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{cases} e_1 \mapsto e_2 \\ e_2 \mapsto -e_1 \end{cases}$$

keine Eigenwerte besitzt, aber die Abbildung $\phi \otimes \phi$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2. (Alleine, 2P+2P)

Seien V, W zwei K-Vektorräume.

a) Ein Element $x \in V \otimes_K W$ heißt *rein* oder *primitiv*, wenn es sich als einfaches Tensorprodukt $x = v \otimes w$ für zwei Elemente $v \in V, w \in W$ schreiben lässt.
Geben Sie an, ob das folgende Element in $\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ primitiv ist.

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Für Vektoren $v \in V$, $w \in W$ gilt: Aus $v \otimes w = \underline{0}$ folgt $v = \underline{0} \in V$, oder $w = \underline{0} \in K$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 04. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. (Gruppe, 2P +2P)

Seien k ein Körper und K eine Körpererweiterung von k, das heißt K ist ein Körper und $k \subset K$ ist ein Unterring von K. Insbesondere ist K ein k-Vektorraum. Sei außerdem V ein k-Vektorraum.

a) Nun betrachte das Tensorprodukt $V \otimes_k K$. Für alle $a \in K$ definieren wir eine Abbildung $m_a \colon V \otimes_k K \to V \otimes_k K$, indem wir die universelle Eigenschaft des Tensorprodukt auf die Abbildung
$$V \times K \longrightarrow V \otimes_k K, \quad (v, b) \longmapsto v \otimes ab$$
anwenden. Zeigen Sie, dass $V \otimes_k K$ mit der übliche Addition und der Multiplikation
$$\odot \colon (V \otimes_k K) \times K \longrightarrow V \otimes_k K, \quad (x, a) \longmapsto m_a(x)$$
zu einem K-Vektorraum wird.

b) Ist die Familie $\{b_i |\ i \in I\}$ eine Basis von V über k, so ist die Familie $\{b_i \otimes 1_K |\ i \in I\}$ eine Basis von $V \otimes_k K$ als K-Vektorraum. Insbesondere gilt $\dim_k(V) = \dim_K(V \otimes_k K)$.

Aufgabe 4. (Gruppe, 1P+1P+1P+1P)

Seien U, V, W drei K-Vektorräume. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass $\otimes$ bis auf Isomorphie assoziativ ist, d.h. es gilt
$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W).$$
Zeigen Sie dazu folgende Teilaufgaben:

a) Sei X ein weiterer K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für jedes $u \in U$, jedes $w \in W$ und jede multilineare Abbildung $m \colon U \times V \times W \to X$ die induzierten Abbildungen
$$m_u \colon V \times W \longrightarrow X, \quad (v, w) \longmapsto m(u, v, w)$$
und
$$m_w \colon U \times V \longrightarrow X, \quad (u, v) \longmapsto m(u, v, w)$$
bilinear sind.

b) Zeigen Sie, dass durch die Abbildungen in a) für alle $u \in U$ und alle $w \in W$ Vektorraum-Homomorphismen
$$\tilde{m}_u \colon V \otimes W \to X \quad \text{und} \quad \tilde{m}_w \colon U \otimes V \to X$$
induziert werden, sodass $\tilde{m}_u \circ \tau_{V \times W} = m_u$ beziehungsweise $\tilde{m}_w \circ \tau_{U \times V} = m_w$ gilt.
Dabei seien $\tau_{V \times W} \colon V \times W \to V \otimes W$ beziehungsweise $\tau_{U \times V} \colon U \times V \to U \otimes V$ definiert durch $\tau_{V \times W}(v, w) := v \otimes w$ und $\tau_{U \times V}(u, v) := u \otimes v$.

c) Für einen K-Vektorraum X bezeichne $\mathrm{Mult}(U, V, W; X)$ die Menge der multilinearen Abbildungen
$$m \colon U \times V \times W \to X.$$
Zeigen Sie, dass eine UAE (universelle Abbildungseigenschaft) für die Menge $\mathrm{Mult}(U, V, W; X)$ und $\mathrm{Hom}(U \otimes (V \otimes W); X)$ beziehungsweise für $\mathrm{Mult}(U, V, W; X)$ und $\mathrm{Hom}((U \otimes V) \otimes W; X)$ existiert.
Hinweis: Vergleiche die UAE des Tensorprodukts.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 04. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

d) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil c) die Isomorphie $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$.

Aufgabe 5. (Gruppe, 2+2 Bonuspunkte)

Seien U, V, W drei K-Vektorräume. Wir definieren die direkte Summe für beliebige Vektorräume als $V \oplus W := V \times W$.[1]

a) Wir haben die beiden Einbettungen

$$\begin{aligned} & \iota_V : V \to V \oplus W \quad , \quad v \mapsto (v, 0) \\ \text{und} \quad & \iota_W : W \to V \oplus W \quad , \quad w \mapsto (0, w) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die direkte Summe die folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt: Für je zwei lineare Abbildungen $f : V \to U$ und $g : W \to U$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $h : V \oplus W \to U$ mit $f = h \circ \iota_V$ und $g = h \circ \iota_W$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "\iota_V"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & W \arrow[dl, "\iota_W"'] \arrow[ddl, bend left, "g"] \\
& V \oplus W \arrow[d, "\exists! h"] & \\
& U &
\end{tikzcd}$$

b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $\oplus, \otimes$ auf der Klasse der Vektorräume das Distributivgesetz (bis auf Isomorphie) erfüllen, d.h. zeigen Sie die folgende Isomorphie:

$$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$$

Hinweis: Konstruieren Sie natürliche bilineare Abbildungen $U \times V \to U \otimes (V \oplus W)$ *und von* $U \times (V \oplus W) \to U \otimes V$ *und folgern Sie aus den UAE die Isomorphie.*

[1] Es ist leicht nachzuprüfen, dass das isomorph ist zur direkten Summe von Untervektorräumen.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 04. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.