Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

8. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Skalarprodukt, Cauchy-Schwarz Ungleichung, Winkel, unitäre Matrix, Norm

Aufgabe 1. ((Alleine) 2P+2P)

a) Sei V ein endlichdimensionaler, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Sei weiterhin

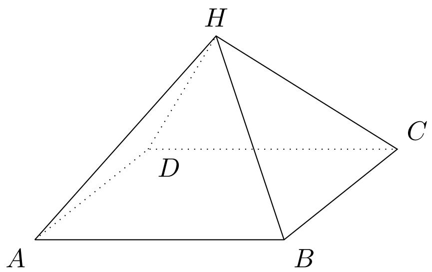
$$\pi_U : V = U \oplus U^\perp \to U \quad , \quad v := u + u^\perp \mapsto u$$

die orthogonale Projektion auf U. Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$\min_{u \in U \setminus \{0\}} \measuredangle(v, u) = \measuredangle(v, \pi_U(v))$$

wobei $\measuredangle(v, w) := \cos^{-1}(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen zwei Vektoren v, w ist.

b) Die Cheops-Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von $11 \cdot 40$ Ellen[1] und eine Höhe von $7 \cdot 40$ Ellen. Seien A, B, C, D die vier Ecken der Pyramide auf der Grundfläche und H die Spitze der Pyramide.



Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Schrägen $\overrightarrow{AH}$ und der Grundseite $\overrightarrow{AB}$ sowie den Winkel zwischen der Schrägen $\overrightarrow{AH}$ und der Diagonalen $\overrightarrow{AC}$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Aussage aus Teil a).
Hinweis: Sie dürfen bei der Berechnung der Winkel einen Taschenrechner verwenden.

[1] Eine damalige ägyptische Elle entspricht etwa 52 cm.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 11. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 2. ((Gruppe) 1P+1P+2P)

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein K-Vektorraum. Wir sagen eine Norm $\|\cdot\|$ erfüllt die Parallelogrammgleichung, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

a) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung erfüllt [2].

b) Auf K^n ist für $1 \leq p < \infty$ die p-Norm[3] definiert als

$$\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k} |v_i|^p}$$

Zeigen Sie, dass für $p \neq 2$ und $n \geq 2$ die p-Norm von keinem Skalarprodukt induziert wird.

c) Sei nun V endlichdimensional und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\|\cdot\|_{op} : \mathrm{End}(V) \to K \quad , \quad \phi \mapsto \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|}$$

eine Norm auf $\mathrm{End}(V)$ ist. Diese wird auch *Operatornorm* genannt.

Aufgabe 3. ((Alleine) 4P)

Sei $\mathbb{C}[X]$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen Polynome. Wir definieren auf $\mathbb{C}[X]$ die Abbildung

$$\beta(f, g) := f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)} + 2f(-1)\overline{g(-1)}.$$

a) Zeigen Sie, dass β eine Sesquilinearform ist.

b) Seien $P_n \subset \mathbb{C}[X]$ die komplexen Polynome von Grad kleinergleich n. Geben Sie alle $n \in \mathbb{N}$ an, sodass die Einschränkung $\beta|_{P_n}$ auf P_n ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 1+3P)

Seien V und W zwei endlichdimensionale Prähilberträume und $\phi : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus, der die Skalarprodukte erhält, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle v, w \rangle_V = \langle \phi(v), \phi(w) \rangle_W.$$

a) Zeigen Sie, dass dann bereits $\dim(V) \leq \dim(W)$ gilt.

b) Seien nun S und B Orthonormalbasen von V bzw. W. Zeigen Sie, dass für die Darstellungsmatrix

$$D_{BS}(\phi)^* \cdot D_{BS}(\phi) = I_{\dim(V)}$$

das Produkt mit ihrer Adjungierten die Einheitsmatrix ergibt.
Gilt auch $D_{BS}(\phi) \cdot D_{BS}(\phi)^* = I_{\dim(W)}$?
Hinweis: Aufgabe 4 a) von Blatt 5 könnte eventuell helfen.

[2] Der Satz von Jordan-von Neumann besagt sogar die Rückrichtung, nämlich dass eine Norm die die Parallelogrammgleichung erfüllt bereits von einem Skalarprodukt kommt.

[3] Dass dies tatsächlich eine Norm ist, sehen Sie im Tutorium bzw. in Analysis.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 11. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.