Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

9. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

normale Endomorphismen, Adjungierte, Isometrien, Hauptachsentransformation

Aufgabe 1. ((Alleine) 2P+2P)

a) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir sagen eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ besitzt eine Wurzel $\sqrt{A} \in K^{n\times n}$, wenn $A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$ gilt. Zeigen Sie, dass jede normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Wurzel hat.

b) Sei $\dim(V) = n$ ein $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\phi \in \operatorname{End}(V)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus. Zeigen Sie, dass dann ein Skalarprodukt auf V existiert, bezüglich dem ϕ normal ist.

Aufgabe 2. ((Gruppe) 4P)

Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ und nur endlich viele sind nicht } 0\}$$

der endlichen Folgen über $\mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ haben wir das Standardskalarprodukt

$$\langle (a_i)_i, (b_i)_i \rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i b_i.$$

a) Auf dem Raum der Folgen haben wir den Linksshift

$$L : \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} \quad , \quad (a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots).$$

Berechnen Sie die Adjungiert vom Linksshift L.

b) Wir betrachten den Endomorphismus

$$\sigma : \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_0^{\mathbb{N}} \quad , \quad (a_1, a_2, \dots) \mapsto (\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=2}^{\infty} a_i, \sum_{i=3}^{\infty} a_i, \dots)$$

Zeigen Sie, dass σ keine Adjungierte besitzt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 18. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 1P+1,5P+1,5P)

Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik, d.h. für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(v,w) := \|v-w\|$. Sei weiterhin $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Abbildung[1] die den Nullvektor fixiert, d.h. für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(v,w) = d(\phi(v), \phi(w))$ und $\phi(0) = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass ϕ dann bereits linear ist. Seien hierfür $v, w \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Machen Sie sich nochmal klar, dass dann ϕ das Skalarprodukt erhält (s. Blatt 5 Aufgabe 4), d.h. es gilt $\langle v, w\rangle = \langle \phi(v), \phi(w)\rangle$. Folgern Sie, dass ϕ eine Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis abbildet.

b) Zeigen Sie, dass $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass ϕ eine Gerade auf eine Gerade abbildet.

c) Zeigen Sie, dass $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$ gilt.
Hinweis: Benutzen Sie hierfür die Fourierentwicklung.

Aufgabe 4. ((Alleine) 1P+1,5P+1,5P)

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $U \subset V$ eine Hyperebene, d.h. U ist ein Untervektorraum mit $\dim(U) = \dim(V) - 1$. Sei $\pi_U : V \to U$ die orthogonale Projektion auf U. Wir definieren als Spiegelung an U die Abbildung

$$\sigma_U : V \to V \quad , \quad v \mapsto 2\pi_U(v) - v.$$

a) Zeigen Sie, dass σ_U eine Isometrie ist.

b) Seien $v, w \in V$ zwei normierte Vektoren, d.h. es gilt $\|v\| = 1 = \|w\|$. Zeigen Sie, dass dann eine Hyperebene U existiert, sodass $\sigma_U(v) = w$ gilt.

c) Sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass sich ϕ als endliche Verknüpfung von Spiegelungen $\sigma_{U_1} \circ \cdots \circ \sigma_{U_k} = \phi$ schreiben lässt.

[1] Man beachte, dass eine isometrische Abbildung normalerweise nicht unbedingt bijektiv sein muss. Eine Isometrie bezeichnet üblicherweise eine isometrische Abbildung die zusätzlich bijektiv ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 18. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 5. ((Gruppe) 6 Bonuspunkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Dann erhalten wir ein Ellipsoid [2] als die Menge

$$E_A := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^t A v = 1\}.$$

a) Bestimmen Sie für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ den maximalen und den minimalen Abstand von E_A zum Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$.

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ ein zweidimensionaler Untervektorraum. Zeigen Sie, dass dann $E_A \cap U$ eine Ellipse ist.
Bemerkung: U kann hierbei sogar eine beliebige Ebene sein, dann hat lediglich die resultierende Ellipse nicht mehr den Ursprung als Mittelpunkt.

c) Zeigen Sie dass ein zweidimensionaler Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^3$ existiert, sodass $E_A \cap U$ ein Kreis ist.
Hinweis: Was sind die beiden Schnitte, die die größte bzw. kleinste Ellipse ergeben? Zwischen den beiden liegt der Kreis.

[2] Alternativ können wir ein Ellipsoid auch als die Drehung der Lösungsmenge von $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ definieren. Die Zahlen a, b, c entsprechen hierbei den Längen der Halbachsen.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 18. 06. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.