Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. C. Steinhart

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Nachklausur zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Sommersemester 2019

Bearbeitungszeit: 180 Minuten.

- Bitte füllen Sie das Deckblatt vollständig aus und schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf den zugehörigen zwei Seiten.
- Jede Aufgabe wird maximal mit 10 Punkten bewertet. Ab 30 Punkten gilt die Klausur **auf jeden Fall** als bestanden.
- Als Literatur ist nur ein zweiseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt zulässig.
- Es sind keine elektronischen Geräte (z.B. Handy, Taschenrechner) erlaubt. Das Mitführen dieser Geräte wird als Täuschungsversuch gewertet. Haben Sie solche Geräte dabei, können Sie diese bei der Aufsicht hinterlegen.

Name:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punktzahl:								

Aufgabe 1: Gegeben sei die lineare Abbildung:

$$\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad , \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot v$$

a) Bestimmen Sie Eigenräume, charakteristisches Polynom und Minimalpolynom von ϕ.

b) Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^4$ an, sodass $D_{BB}(\phi)$ in Jordan-Normalform ist und geben Sie die Jordan-Normalform an.

c) Berechnen Sie $\phi^5(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Bitte diese beiden Seiten nur für Aufgabe 1 verwenden.

Aufgabe 2:

a) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und A eine R-Algebra. Zeigen Sie, dass Multiplikation in A eine R-bilineare Abbildung ist, sprich zeigen Sie, dass die Abbildung

$$m_A : A \times A \to A \quad , \quad (a,b) \mapsto a \cdot b$$

bilinear ist.

b) Wir betrachten das folgende Skalarprodukt β auf $\mathbb{R}^3$:

$$\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad (v,w) \mapsto v^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot w$$

Zeigen Sie: Einer der beiden Endomorphismen Φ_1 und Φ_2 des $\mathbb{R}^3$

$$\Phi_1 : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \text{ und } \Phi_2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v$$

ist bezüglich des Skalarprodukts β selbstadjungiert und einer nicht. Kann es für letzteren ein anderes Skalarprodukt β' auf $\mathbb{R}^3$ geben, so dass dieser Endomorphismus bezüglich β' selbstadjungiert ist?

c) Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ und $\{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ die zugehörige duale Basis des Dualraums V^*. Sei $f := 3b_1^* + 2b_2^* + b_3^*$. Bestimmen Sie $f(b_1 + 2b_2 + 5b_3)$.

Bitte diese beiden Seiten nur für Aufgabe 2 verwenden.

Aufgabe 3:

a) Wir betrachten die folgende lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, die eine Drehung der xy-Ebene verknüpft mit Streckungen entlang der Koordinatenachsen ist:

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot v.$$

Es sei $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Basis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ an und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\bigwedge^2 \psi$ bezüglich der von Ihnen gewählten Basis.

b) Geben Sie die Eigenräume und Eigenwerte von $\psi, \bigwedge^2 \psi$ und $\bigwedge^3 \psi$ für ψ aus Aufgabenteil a) an.

c) Sei nun V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Seien weiterhin $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig und $U :=< v_1, \ldots, v_k >$ der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum. Zeigen Sie: Ist $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ ein Eigenvektor von $\bigwedge^k \phi$ zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$, dann ist U ein ϕ-invarianter Untervektorraum.

Bitte diese beiden Seiten nur für Aufgabe 3 verwenden.

Aufgabe 4: Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $\mathcal{C}$ die folgende Kategorie:

- $\mathcal{C}$ hat genau ein Objekt P.
- $\mathrm{Mor}(P, P) := G$ und die Verknüpfung ist wie folgt definiert:

  für $g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(P, P) = G$ ist die Verknüpfung $g_1 \circ g_2$ definiert durch $g_1 \circ g_2 := g_1 \star g_2$

Weiter ist eine Aktion $\beta : G \times X \to X, (g, x) \mapsto \beta(g, x) = g \cdot x$ auf einer Menge X gegeben.

a) Wir definiere $F_1 : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ wie folgt:

- Auf den Objekten: $F_1 : P \mapsto X$, das heißt das eine Objekt P in $\mathcal{C}$ wird auf die Menge X abgebildet.
- Auf den Morphismen: $F_1 : \mathrm{Mor}(P, P) = G \to \mathrm{Mor}(X, X) = \mathrm{Abb}(X, X)$, $g \mapsto f_g$, wobei hier f_g die Abbildung $f_g : X \to X$, $x \mapsto \beta(g, x) = g \cdot x$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass F_1 einen Funktor von der Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie Set der Mengen ist. Ist F_1 kovariant oder kontravariant?

b) Sei $F_2 = \hom_P$ der Hom-Funktor für das einzige Objekt P in der Kategorie $\mathcal{C}$, das heißt $F_2(P) = \mathrm{Mor}(P, P) = G$ und für $g \in G = \mathrm{Mor}(P, P)$ ist $F_2(g) = (h \mapsto g \star h) \in \mathrm{Abb}(G, G)$. Wir wählen ein $x \in X$ und definieren die Abbildung:

$$\alpha_P : F_2(P) \to F_1(P) \quad , \quad h \mapsto \beta(h, x) = h \cdot x.$$

Zeigen Sie, dass $\{\alpha_P\}$ eine natürliche Transformation von F_2 nach F_1 ist.
Zeigen Sie weiterhin, dass diese natürliche Transformation genau dann eine funktorielle Äquivalenz ist, wenn die Aktion transitiv ist und $\mathrm{Stab}_G(x) = \{e_G\}$ gilt, wobei e_G das neutrale Element der Gruppe G ist.

Bitte diese beiden Seiten nur für Aufgabe 4 verwenden.

Aufgabe 5:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die symmetrische Gruppe S_n operiert auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ punktweise, d.h. wir betrachten die Gruppenaktion:

$$\alpha : (\sigma, \{i_1, \ldots, i_k\}) \mapsto \{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k)\}$$

Als Beispiel: Für $n = 3$, $\sigma = (1, 2, 3)$ und $M = \{1, 2\} \in \mathcal{P}$ ist $\alpha(\sigma, M) = \{2, 3\}$.

a) Bestimmen Sie für $n = 3$ die Bahn von $M = \{1, 2\}$.

b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Bahnen in Abhängigkeit von n. Geben Sie für $n = 3$ für jede Bahn jeweils einen Repräsentanten an.

c) Was sind für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Fixpunkte der Operation, das heißt die Teilmengen $M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mit: $\forall \sigma \in S_n : \alpha(\sigma, M) = M$?

d) Bestimmen Sie für $n = 5$ den Stabilisator $\mathrm{Stab}(\{1, 2, 3\})$.

e) Beweisen Sie mithilfe der Bahnformel die Formel $A_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ für $k \in \mathbb{N}, k \leq n$. Hierbei bezeichnet $A_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge k Elemente auszuwählen.
Hinweis: Die symmetrische Gruppe S_n enthält genau $n!$ viele Elemente.

Bitte diese beiden Seiten nur für Aufgabe 5 verwenden.

Aufgabe 6:

a) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler t von 1326 und 533 und finden sie $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $t = a \cdot 1326 + b \cdot 533$. Gibt es ganze Zahlen c und d mit $1 = c \cdot 1326 + d \cdot 533$?

b) Sei $\mathbb{Z}_2 := \{\frac{p}{2^k} \in \mathbb{Q} \mid p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ die Menge der rationalen Zahlen mit 2er-Potenzen im Nenner.

   i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_2$ mit der üblichen Multiplikation und Addition ein Teilring von $\mathbb{Q}$ ist.

   ii) Ist 10 ein Teiler von $\frac{15}{2}$ in $\mathbb{Z}_2$?

   iii) Zeigen Sie: Ist p eine ungerade Primzahl, dann ist $\frac{p}{2^k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Primelement in $\mathbb{Z}_2$.

Bitte diese beiden Seiten nur für Aufgabe 6 verwenden.