



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

**ORIGAMIS, DIE ZYKLISCH ÜBER DEM
 $N \times N$ -TORUS FAKTORISIEREN**

Bachelorarbeit

Alexander ROGOVSKYY

Betreuer:

Prof. Dr. Gabriela
WEITZE-SCHMITHÜSEN

Erstkorrektor:

Prof. Dr. Gabriela
WEITZE-SCHMITHÜSEN

Zweitkorrektor:

Prof. Dr. Laurent BARTHOLDI

18. April 2022

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 22. Dezember 2021

Danksagung

Ich möchte mich zuallererst bei Prof. Weitze-Schmithüsen für ihre Unterstützung bei dem Erstellen der Arbeit bedanken. Ihre Vorlesungen haben mich dazu bewegt, mich mit den Themen der Algebra sowie der Geometrie zu beschäftigen. Von den Hilfestellungen sowie dem ausführlichen und häufigen Feedback habe ich weit über den Rahmen dieser Arbeit hinaus profitiert.

Ich bedanke mich bei Simon Döring, Friedrich Günther sowie Karl Schrader für das ausführliche Korrekturlesen der Arbeit.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, welche mich die gesamte Studienzeit über in allen Aspekten unterstützt hat.

Diese Bachelor-Arbeit entstand im Rahmen des SFB-TRR 195 „Symbolic Tools in Mathematics and their Application“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG).

Inhaltsverzeichnis

I. Der Raum der Überlagerungen des $(n \times n)$-Torus	1
1. Einige Definitionen aus der Überlagerungstheorie	1
2. Die Fundamentalgruppe von T_n	7
3. Bestimmung der Basiswechselmatrix D_{BS}	16
4. Klassifikation der normalen zyklischen Überlagerungen des T_n	19
II. Der Raum der zyklisch faktorisierenden Origamis \mathcal{O}	27
1. Permutationsdarstellung von Origamis	27
2. Das induzierte Origami	28
3. Klassifikation von \mathcal{O}	34
4. Berechnung von \widehat{D}	37
III. Veech-Gruppen von Origamis aus \mathcal{O}	41
1. Origamis als Translationsflächen	41
2. Die Aktion von $Sl_2(\mathbb{Z})$ auf \mathcal{O}	44
3. Aktion von $Sl_2(\mathbb{Z})$ auf der Homologie von T_n	46
4. Origamis mit gegebenen Veech-Gruppen	52
5. Eine unendliche Folge von $Sl_2(\mathbb{Z})$ -Origamis	57
IV. Weitere Eigenschaften von Origamis aus \mathcal{O}	59
1. Bahnstruktur der Origamis	59
2. Stratum und Geschlecht	62
A. Algorithmus zur Suche nach Origamis mit gegebener Veech-Gruppe	69
B. Origamis mit Kongruenzuntergruppen als Veech-Gruppen	73
Literatur	77

Notations- und Definitionsverzeichnis

Konventionen

Der Konsistenz und Lesbarkeit halber verwende ich im Folgenden, soweit nicht anders angegeben, die folgenden Konventionen für mathematische Objekte:

X, Y, Z	Topologische Räume
U, V, W	Umgebungen
p, q	Überlagerungen
o	Origamis
G, H	Gruppen
g, h, e	Gruppenelemente; e ist das neutrale Element
f, t	(stetige) Abbildungen
α, β, γ	Wege

Fixierte Variablen

Die folgenden Variablen werden in weiten Teilen des Textes fixiert und haben eine feste Bedeutung:

$n \in \mathbb{N}^+$	Länge des $n \times n$ -Torus.
$N = n^2 + 1$	Ordnung der Fundamentalgruppe von T_n .
$d \in \mathbb{N}^+$	Grad der zyklischen Überlagerung $X \rightarrow T_n$.

Definitionen

T_n	Der n -Torus: Definition I.1.6
T	Der triviale 1×1 -Torus: Definition I.1.6
$\text{Deck}(Y/X)$	Die Deck-Gruppe der Überlagerung $Y \rightarrow X$: Definition I.1.10
\tilde{X}	Die universelle Überlagerung zu X : Satz I.1.11
$\pi_1(X, x)$	Die Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x : Definition I.2.2.
$F_k = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$	Die freie Gruppe in den k Erzeugern g_1, \dots, g_k .
$\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_N\}$	Die „Schlitz“-Basis: Definition I.2.12
$\mathcal{S} = \{a, b, l_1, \dots, l_{n^2-1}\}$	Die „Schleifen“-Basis: Definition I.2.13
$D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$	Basiswechselmatrix zwischen \mathcal{S} und \mathcal{B} : Abschnitt 3
$D_B(p)$	Vektordarstellung der Überlagerung p bzgl. der Basis B : Satz I.4.2
$D_{CB}(f)$	Matrix (bzgl. Basen B, C), die die Wirkung der Abbildung f auf der Homologie von T_n beschreibt: Konstruktion II.3.1
\mathcal{C}_n^d	Zyklische normale Überlagerungen von Grad d auf den n -Torus: Definition I.4.1
\mathcal{T}	Erzeugende N -Tupel in $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$: Satz I.4.2
\mathcal{O}_d^n	Die von \mathcal{C}_d^n induzierten Origamis: Konstruktion II.2.3
\hat{D}	Die von $\text{Deck}(T_n/T)$ induzierte Matrixgruppe, die die Wirkung auf der Homologie (bzgl. \mathcal{S}) beschreibt: Definition II.3.2
m	Die Monodromieabbildung: Abschnitt 4
$\text{Homeo}(X)$	Die Gruppe der Homeomorphismen auf X : Definition II.2.6

Top*	Die Kategorie der punktierten topologischen Räume
Grp	Die Kategorie der Gruppen
Ab-Grp	Die Kategorie der abelschen Gruppen
t_x, t_y	Die Translationen von T_n um eine Einheit in die x - bzw. y -Achse: Beispiel II.2.1
e_i	Der i -te Standardbasisvektor im Modul R^k .
Aff	Die Gruppe der affinen Diffeomorphismen: Definition III.1.2
Aff⁺	Die Untergruppe der orientierungserhaltenden affinen Diffeomorphismen: Definition III.1.4
Γ	Die Veech-Gruppe: Definition III.1.4
Trans	Die Translationsgruppe: Definition III.1.4

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit einer speziellen Klasse von *Origamis*. Origamis kann man als Überlagerungen des einfach punktierten Torus oder äquivalent als Verklebung endlich vieler Einheitsquadrate beschreiben. Man kann ihnen auch die Struktur einer *Translationsfläche* [Sch04, Seite 3] geben und anschließend Eigenschaften wie das Stratum oder die Veech-Gruppe untersuchen.

Besonders macht Origamis, dass sie eine einfache kombinatorische Beschreibung durch ein Paar von Permutationen besitzen. Man kann sie daher gut untersuchen. Trotzdem gibt es noch viele offene Probleme. So ist es beispielsweise noch unklar, welche Untergruppen von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index als Veech-Gruppen von Origamis auftreten können [Her12, Seite 16]. Fortschritte hinsichtlich dieser Frage finden sich in [Sch05] und [EM12]. Eine allgemeine Einführung in die Theorie der Origamis findet man in [Her12].

Wir betrachten hier speziell Origamis, welche den $(n \times n)$ -Torus als Zwischenüberlagerung enthalten. Dabei fordern wir, dass die Überlagerung auf den $(n \times n)$ -Torus normal und zyklisch ist.

Das Interesse an solchen Origamis ergibt sich aus ihrer vergleichsweise einfachen Beschreibung durch Äquivalenzklassen von bestimmten Vektoren. Diese werden wir im Rahmen der ersten beiden Kapitel herleiten. Im ersten Kapitel bestimmen wir die Fundamentalgruppe des $(n \times n)$ -Torus und nutzen sie dann, um zyklische normale Überlagerungen auf den $(n \times n)$ -Torus zu klassifizieren.

Im zweiten Kapitel widmen wir uns dann den hieraus entstehenden Origamis. Wir werden sehen, wann zwei Überlagerungen des $(n \times n)$ -Torus äquivalente Origamis induzieren und leiten anschließend die Beschreibung von Origamis durch Vektoren her.

Im dritten Kapitel betrachten wir Origamis als Translationsflächen. Wie allen Translationsflächen kann man auch Origamis eine spezielle Untergruppe von $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ zuweisen, die sogenannte *Veech-Gruppe*. Wir geben einen Algorithmus an, welcher zu einer gegebenen Kongruenzuntergruppe der $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ in der Klasse der oben beschriebenen Origamis solche sucht, die die angegebe-

ne Gruppe als Veech-Gruppe besitzen. Mit diesem Algorithmus finden wir Origamis, die einige bisher nicht als Veech-Gruppen realisierte Kongruenzuntergruppen als Veech-Gruppen besitzen. Anschließend konstruieren wir eine unendliche Folge von Origamis mit $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ als Veech-Gruppe.

Schließlich leiten wir im vierten Kapitel einige weitere Eigenschaften her. Dabei beschäftigen wir uns zum einen mit der Struktur der Äquivalenzklassen von Vektoren, mit denen die Origamis beschrieben werden, und zum anderen mit dem Stratum sowie dem Geschlecht der Origamis. Dabei nutzen wir die Beschreibung von unseren Origamis durch Vektoren.

Wir stellen in einigen Abschnitten Algorithmen vor, welche bei der Untersuchung der Origamis nützlich sind. Die Algorithmen sind stets in GAP[21] geschrieben. Wir verwenden hierbei die GAP Pakete [Origami] sowie [ModularGroup].

Kapitel I.

Der Raum der Überlagerungen des $(n \times n)$ -Torus

In diesem Kapitel werden wir Überlagerungen des $(n \times n)$ -Torus studieren. Wir werden uns hierbei auf normale Überlagerungen mit zyklischer Deck-Gruppe beschränken.

In dem ersten Abschnitt führen wir als Vorbereitung einige wichtige Begriffe aus der Überlagerungstheorie ein. Im zweiten Abschnitt werden wir dann die Fundamentalgruppe des $(n \times n)$ -Torus bestimmen und zwei Basen angeben. Diese werden wir anschließend nutzen, um eine Beschreibung dieser Überlagerungen durch Vektoren zu konstruieren.

1. Einige Definitionen aus der Überlagerungstheorie

In diesem Abschnitt stellen wir einige grundlegende Definitionen und Aussagen aus der Überlagerungstheorie zusammen, die wir im weiteren Verlauf benötigen werden. Für eine vollständige Einführung siehe [Hat02] oder [For81].

Zentral für die nachfolgenden Untersuchungen ist der Begriff der Überlagerung.

Definition I.1.1 (Überlagerung): Seien X und Y topologische Räume und Y zusammenhängend. Eine stetige Abbildung $p : Y \rightarrow X$ heißt *Überlagerung*, falls sie folgende Eigenschaft erfüllt:

Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung V_x , sodass $p^{-1}(V_x) = \bigcup_{i \in I} U_i$ für offene Mengen $U_i \subseteq Y$ und $I \neq \emptyset$ gilt und weiterhin die Einschränkungen $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V_x$ für alle $i \in I$ Homöomorphismen sind.

Die Umgebung V_x heißt *Überlagerungsumgebung* von x und $p^{-1}(x)$ heißt *Faser* von x .

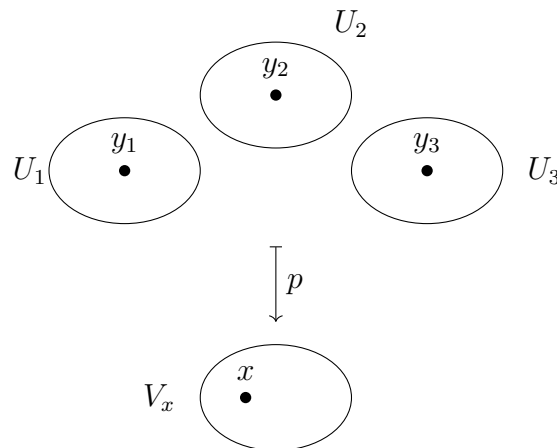


Abbildung I.1.: Schematische Darstellung einer Überlagerungsumgebung V_x sowie der Urbilder y_1, y_2, y_3 eines Punktes x .

Bemerkung I.1.2: Die Kardinalität der Fasern ist konstant. Wir betrachten hierzu für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Menge V_n der Punkte mit genau n Urbildern. Man bemerke, dass, falls ein Punkt n Urbilder hat, so hat jeder Punkt seiner Überlagerungsumgebung ebenfalls n Urbilder. Es gilt also

$$V_n = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Überlagerungsumgebung von einem } x \in V_n\}.$$

Somit sind alle V_n offen und offensichtlich paarweise disjunkt. Sie bilden also eine disjunkte Zerlegung von X . Da Y zusammenhängend ist, ist es X auch (Überlagerungen sind surjektiv), und somit kann nur eine der Mengen nichtleer sein; diese muss dann ganz X sein.

Die Kardinalität der Fasern heißt *Grad* der Überlagerung. Ist dieser Grad endlich, so bezeichnen wir die Überlagerung als *endlich*.

Beispiele für Überlagerungen können wir erhalten, indem wir eine bestimmte Art von Gruppenoperationen betrachten:

Definition I.1.3 (Lokal freie Gruppenoperation): Sei G eine Gruppe (mit neutralem Element e), die auf einem topologischen Raum X durch $f : G \times X \rightarrow X$ operiert. Weiterhin gelte:

- Für jedes $g \in G$ ist die Funktion $f(g, \cdot)$ stetig.
- Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung U , sodass für jedes $g \in G \setminus \{e\}$ gilt, dass U und $f(g, U)$ disjunkt sind.

Dann heißt die Gruppenoperation *lokal frei*.

1. Einige Definitionen aus der Überlagerungstheorie

Bemerkung I.1.4: Die erste Bedingung impliziert, dass $f(g, \cdot)$ für jedes $g \in G$ ein Homöomorphismus ist, denn mit $f(g^{-1}, \cdot)$ erhalten wir eine stetige Umkehrabbildung.

Die zweite Bedingung impliziert, dass für eine solche Umgebung U die Mengen $f(g, U)$, $g \in G$ sogar paarweise disjunkt sind. Wäre nämlich $f(g, U) \cap f(h, U) \neq \emptyset$ für $g, h \in G$, dann gäbe es $x, y \in X$ mit $f(h^{-1}g, x) = y$, was laut Bedingung (wegen $x, y \in U$) nur dann sein kann, wenn $h = g$ gilt. Außerdem impliziert die Bedingung, dass die Gruppenoperation frei ist.

Für jeden Punkt findet man also eine Umgebung, sodass die Wirkung eines Gruppenelementes diese Umgebung „weit genug“ verschiebt. Diese Art von Gruppenoperationen sind interessant, da man aus ihnen einfach Überlagerungen konstruieren kann.

Satz I.1.5: Sei $\bullet : G \times X \rightarrow X$ eine lokal freie Gruppenoperation. Wir bezeichnen mit X/G die Menge der Bahnen der Gruppenoperation versehen mit der Quotiententopologie. Dann ist die natürliche Projektion $\pi : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung.

Beweis: Dass π stetig ist, folgt direkt aus der Definition der Quotiententopologie (sie ist sogar die feinste Topologie, für die π stetig ist).

Sei $x \in X$ und $\pi(x) \in X/G$. Durch die Voraussetzung erhalten wir eine offene Umgebung U von x , sodass für $g \in G \setminus \{e\}$ die Mengen U und $g \bullet U$ disjunkt sind. Wir setzen $\pi(U)$ als Überlagerungsumgebung von $\pi(x)$. Nach Definition von π gilt

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \bullet U.$$

Da $x \mapsto g \bullet x$ für jedes $g \in G$ ein Homöomorphismus ist, ist jedes $g \bullet U$ offen. Folglich ist $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen und nach Definition von Quotiententopologie auch $\pi(U)$ selbst. Weiterhin ist die Vereinigung nach Bemerkung I.1.4 disjunkt und die Einschränkungen $\pi|_{g \bullet U}$ für jedes g Homöomorphismen. \square

Nun können wir konkrete Beispiele für Überlagerungen konstruieren. Das folgende Beispiel ist auch gleich das wichtigste Beispiel für Überlagerungen in diesem Kapitel.

Definition I.1.6 (Der n -Torus T_n): Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und $X := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ die Zahlenebene, aus der wir die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten entfernen. Die Gruppe $(n\mathbb{Z})^2$ operiert lokal frei auf X durch Verschiebung:

$$(g, h) \bullet (x, y) \mapsto (x + g, y + h).$$

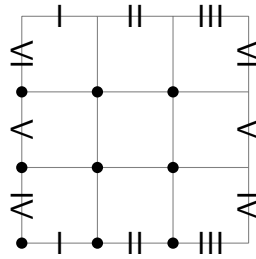


Abbildung I.2.: T_3 . Kanten mit derselben römischen Zahl werden identifiziert. Schwarze Punkte sind aus der Fläche ausgenommen.

Wir bezeichnen die Menge der Bahnen $X/(n\mathbb{Z})^2$ mit T_n und nennen sie $n \times n$ -Torus oder einfach nur n -Torus. Für den 1-Torus T_1 schreiben wir weiterhin abkürzend T .

Beweis: Die Verschiebung ist offensichtlich stetig. Wir können als Umgebung eines Punktes $x \in X$ den Kreis \mathcal{B} um x mit Radius $1/3$ nehmen. Dieser ist eine offene Menge (selbst, wenn einer der Gitterpunkte aus $(n\mathbb{Z})^2$ enthalten ist) und disjunkt zu jedem Kreis, der entsteht, wenn wir \mathcal{B} um ganzzahlige Koordinaten verschieben. \square

In Abbildung I.2 sieht man beispielsweise den 3-Torus anschaulich: Es handelt sich hierbei um ein 3×3 -Quadrat, bei welchem die Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) ausgenommen sind und gegenüberliegende Kanten miteinander verklebt sind. Dies passt auch mit der in aus der Schulmathematik bekannten Vorstellung des Torus als Rotationsfläche des Kreises im dreidimensionalen Raum zusammen; man stelle sich hierzu die Verklebungen der oberen mit der unteren Kante und der rechten mit der linken Kante vor. Wir verwenden im Folgenden bei solchen Abbildungen immer die Konvention, dass, falls nicht anders markiert, gegenüberliegende Kanten implizit miteinander verklebt sind.

Ein Spezialfall von Definition I.1.1 ist besonders hervorzuheben.

Definition I.1.7 (Origami): Eine endliche Überlagerung von T heißt *Origami*.

Origamis kann man anschaulich darstellen, indem man die Urbilder von T aufzeichnet und die miteinander identifizierten Kanten verklebt. Eine solche Darstellung sieht man in Abbildung I.3.

Man kann sich nun fragen, wie eine Kategorie der Überlagerungen aussehen kann. Die Objekte haben wir bereits definiert; es fehlen die Morphismen.

1. Einige Definitionen aus der Überlagerungstheorie

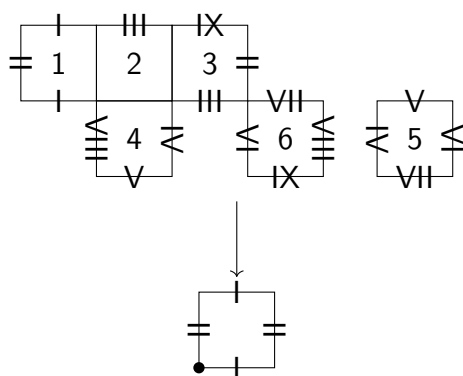


Abbildung I.3.: Ein Origami von Grad 6. Jedes der Quadrate wird durch die Überlagerung auf den trivialen Torus T abgebildet.

Definition I.1.8: Seien $p : Y \rightarrow X$ und $p' : Y' \rightarrow X$ zwei Überlagerungen. Ein Morphismus zwischen p und p' ist eine stetige Abbildung $\varphi : Y \rightarrow Y'$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\varphi} & Y' \\
 & \searrow p & \swarrow p' \\
 & & X
 \end{array}$$

Ist φ ein Homöomorphismus, so heißen die beiden Überlagerungen *äquivalent* oder *isomorph*.

Bemerkung I.1.9: Haben wir einen Raum X , so kann man die Kategorie $\mathbf{Cov}(X)$ betrachten, deren Objekte Überlagerungen auf X sind. Morphismen bzw. Isomorphismen sind dann wie oben beschrieben.

In der Überlagerungstheorie stellt sich die natürliche Frage nach der Klassifikation von Überlagerungen bis auf Isomorphie. Es stellt sich heraus, dass hierfür die Untersuchung der Automorphismengruppe einer gegebenen Überlagerung $Y \rightarrow X$ von großer Bedeutung ist.

Definition I.1.10: Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Wir definieren

$$\begin{aligned}
 \text{Deck}_p(Y/X) &:= \text{Aut}_p(Y/X) \\
 &= \{\varphi : Y \rightarrow Y \mid \varphi \text{ ist ein Automorphismus von Überlagerungen}\}.
 \end{aligned}$$

Dies ist eine Gruppe bezüglich Komposition von Morphismen. Falls p aus dem Kontext klar ist, schreiben wir einfach nur $\text{Deck}(Y/X)$.

Die Überlagerung heißt *normal*, falls $\text{Deck}(Y/X)$ transitiv auf den Fasern operiert, d.h.

$$\forall x \in X : \forall y, z \in p^{-1}(x) : \exists f \in \text{Deck}(Y/X) : f(y) = z.$$

Die Wichtigkeit von Deck-Gruppen ergibt sich aus dem folgenden zentralen Satz der Überlagerungstheorie, welchen wir hier nur zitieren:

Satz I.1.11 (Über die universelle Überlagerung): *Sei X wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann gibt es einen topologischen Raum \tilde{X} und eine Überlagerung $q : \tilde{X} \rightarrow X$ (die sogenannte universelle Überlagerung), sodass Folgendes gilt:*

- (i) \tilde{X} ist einfach zusammenhängend.
- (ii) Für jede weitere Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ gibt es einen eindeutigen Morphismus φ , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \downarrow q & \searrow \varphi & \\ & & Y \\ & \swarrow p & \\ X & & \end{array}$$

Vermöge φ erhalten wir eine Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow Y$. Insbesondere ist die universelle Überlagerung eindeutig bis auf Isomorphie.

- (iii) Normale Untergruppen von $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ stehen in Bijektion mit Isomorphieklassen normaler Überlagerungen auf X . Für einen Normalteiler $N \leq \text{Deck}(\tilde{X}/X)$ erhalten wir also eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$. Es gilt $N \cong \text{Deck}(\tilde{X}/Y)$ und weiterhin

$$\text{Deck}(\tilde{X}/X) / \text{Deck}(\tilde{X}/Y) \cong \text{Deck}(Y/X),$$

wobei wir hier $\text{Deck}(\tilde{X}/Y)$ als (normale) Untergruppe von $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ betrachten.

- (iv) Es gilt $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$, wobei mit π_1 hier die Fundamentalgruppe gemeint ist, welche wir im nächsten Abschnitt einführen.

Beweis: Siehe [Oli10, Satz 1.3.28. und Korollar 1.3.30.]. □

Dieser Satz wird für uns in den nächsten Abschnitten von zentraler Bedeutung sein. Einerseits kann man ihn verwenden, um Fundamentalgruppen zu bestimmen. Andererseits erlaubt er es uns, falls wir umgekehrt die Fundamentalgruppe bereits kennen, die Überlagerungen zu klassifizieren. Diesen Ansatz verwenden wir in Abschnitt 4.

2. Die Fundamentalgruppe von T_n

Wir möchten nun den n -Torus näher untersuchen. Satz I.1.11 motiviert hierzu die Untersuchung der *Fundamentalgruppe* von T_n . Nach der grundlegenden Einführung werden wir die Fundamentalgruppe des n -Torus konkret ausrechnen. Weiterführende Informationen zur Fundamentalgruppe sowie viele Beispiele findet man in [Hat02, Chapter 1].

Definition I.2.1: Sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$.

- Ein *Weg* von x nach y ist eine stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$. Der Weg heißt *geschlossen*, falls $x = y$ gilt.
- Zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ heißen *homotop*, falls es eine stetige Abbildung

$$F : [0, 1] \times X \rightarrow Y \quad \text{mit } F(0, \cdot) = f_0 \text{ und } F(1, \cdot) = f_1$$

gibt.

- Zwei Wege α und β heißen *weghomotop*, falls es eine Homotopie H zwischen ihnen gibt, die zusätzlich den Start- und Endpunkt fix lässt:

$$\forall s \in [0, 1] : H(s, 0) = x \quad H(s, 1) = y$$

Eine Homotopie von Wegen kann man sich als stetige Verzerrung des Weges α in den Weg β vorstellen, welche jedoch die Anfangs- und Endpunkte nicht verändert. Das erste Argument gibt hierbei den „Verzerrungsgrad“ zwischen α und β an. Man prüft leicht nach (siehe [Oli10, Satz 1.1.3.]), dass die Relation

$$\alpha \sim \beta : \iff \alpha \text{ ist homotop zu } \beta$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege zwischen x und y ist.

Zwei Wege α und β mit $\alpha(1) = \beta(0)$ können wir verknüpfen, indem wir zunächst α und dann β ablaufen. Wir erhalten den Weg $\alpha * \beta$:

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2(t - \frac{1}{2})), & \text{falls } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Man kann nun (siehe [Oli10, Satz 1.1.4.]) zeigen, dass diese Verknüpfung von Wegen mit der Homotopierelation verträglich ist. Wir können also davon sprechen, dass zwei Homotopieklassen von Wegen miteinander verknüpft werden:

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

Wir werden daher statt $[\alpha]$ einfach nur α schreiben. Dies ebnet den Weg für die folgende Definition:

Definition I.2.2 (Fundamentalgruppe): Wir bezeichnen mit \sim die Homotopierelation. Sei $x \in X$. Definiere

$$\pi_1(X, x) := \{[\alpha]_{\sim} \mid \alpha \text{ ist ein geschlossener Weg in } x\}.$$

$\pi_1(X, x)$ wird vermöge der Komposition von Wegen und dem trivialen Weg (Identität auf x) zu einer Gruppe. Sie heißt *Fundamentalgruppe von X in x* .

Bemerkung I.2.3: Um zu zeigen, dass dies tatsächlich eine Gruppe ist, muss man einige Homotopien aufstellen [Oli10, Satz 1.1.5.].

Sind zwei Punkte x und y in derselben Wegzusammenhangskomponente, das heißt, es gibt einen Weg α von x nach y , so definiert

$$\gamma \mapsto \alpha * \gamma * \alpha^{-1}$$

einen Gruppenisomorphismus $\pi_1(X, y) \cong \pi_1(X, x)$. Ist X wegzusammenhängend, so ist die Fundamentalgruppe insbesondere nicht von dem Basispunkt abhängig und man kann von $\pi_1(X)$ sprechen. Dies ist bei T_n der Fall.

Bevor wir uns der Bestimmung der Fundamentalgruppe von T_n widmen, müssen wir noch eine wichtige Eigenschaft der Fundamentalgruppe etablieren. Diese Eigenschaft wird uns sowohl bei der Bestimmung der Fundamentalgruppe, als auch bei weiteren Konstruktionen hilfreich sein.

Bemerkung I.2.4: Seien X, Y topologische Räume. Die Fundamentalgruppe π_1 ist ein Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume \mathbf{Top}_* in die Kategorie der Gruppen \mathbf{Grp} im folgenden Sinne: Objekte (X, x) werden auf deren Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ abgebildet. Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert für jedes $x \in X$ einen Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$:

$$f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x)) \quad \gamma \mapsto f \circ \gamma.$$

2. Die Fundamentalgruppe von T_n

Wir wollen nun die Fundamentalgruppe des n -Torus T_n bestimmen. Dabei werden wir in zwei Schritten vorgehen: Zunächst „vereinfachen“ wir T_n auf eine geeignete Art und Weise. Wir möchten hierbei, dass die Fundamentalgruppe erhalten bleibt. Im zweiten Schritt bestimmen wir die Fundamentalgruppe mithilfe eines Satzes aus der algebraischen Topologie.

Zunächst wollen wir definieren, was es bedeutet, eine „geeignete“ Vereinfachung von T_n zu sein.

Definition I.2.5: Zwei Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, falls es Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $f \circ g$ und $g \circ f$ homotop zu Identitäten auf X bzw. Y sind. In diesem Fall heißen f und g *Homotopieäquivalenzen*.

Bemerkung I.2.6: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz und $x \in X$. Dann gilt $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, f(x))$.

Beweis: Man sieht direkt, dass $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ ein Gruppenisomorphismus ist. \square

Wir betrachten nun spezielle Arten von Homotopieäquivalenzen, welche wir relativ einfach konstruieren können.

Definition I.2.7: Sei $A \subseteq X$. Ein *Deformationsretrakt* von X auf A ist eine Homotopie zwischen id_X und einer Abbildung $h : X \rightarrow X$ mit $h(X) = A$ und $h|_A = \text{id}_A$.

Gelegentlich bezeichnet man mit *Deformationsretrakt* auch A selbst.

Anhand der Definition sieht man, dass in diesem Fall A und X homotopieäquivalent sind. Die „Umkehrabbildung“ ist die Inklusion $\iota : A \rightarrow X$ mit

$$\iota \circ h \sim \text{id}_X \quad h \circ \iota \sim \text{id}_A,$$

wobei hier mit \sim die Homotopie von Abbildungen bezeichnet wird.

Wir suchen also als gewünschte „Vereinfachung“ von T_n ein Deformationsretrakt, also eine stetige Verformung von T_n in eine möglichst „einfache“ Teilmenge. Hierzu führen wir zunächst *Graphen* ein und konstruieren dann einen speziellen Graphen als Deformationsretrakt.

Definition I.2.8 (Graph): • Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Paar (V, E) bestehend aus einer Menge von Knoten V und einer Multimenge E von 1- oder 2-elementigen Teilmengen von V .¹

¹Es gibt viele mögliche Variationen von Graphen. Wir betrachten hier ungerichtete Graphen mit Schleifen sowie Mehrfachkanten.

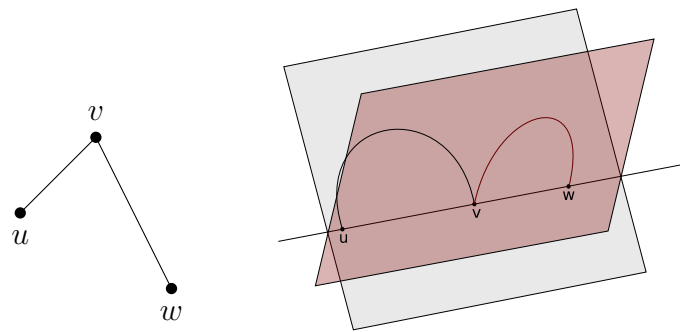


Abbildung I.4.: Beispiel für eine Einbettung eines Graphen in \mathbb{R}^3

- Ein Graph $G' = (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ heißt *Teilgraph* von $G = (V, E)$.
- Ein *Pfad* in G ist eine endliche Folge x_1, \dots, x_k von Knoten, sodass $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$ für alle i gilt. Der Pfad heißt *einfach*, wenn kein Knoten (mit Ausnahme des Start- und Endknotens) darin doppelt vorkommt.
- Ein *Zyklus* ist ein Pfad mit gleichem Start- und Endknoten.
- Ein Graph, bei welchem je zwei Knoten durch einen Pfad verbunden werden können, heißt *zusammenhängend*.

Bemerkung I.2.9: Graphen können auf zwei verschiedene Arten und Weisen mit einer Topologie versehen werden. Für die erste Möglichkeit versehen wir jede Kante beliebig mit einer Richtung, d.h. betrachten eine Kante als ein Paar von Knoten. Man kann nun für jede Kante $e \in E$ eine Kopie des Einheitsintervalls $[0, 1]$ (mit der Standardtopologie) nehmen und entsprechend der Graphstruktur verkleben: Sei e_0 die 0 und e_1 die 1 in der e -ten Kopie von $[0, 1]$. Dann identifizieren wir für jedes feste $v \in V$ alle Punkte der Menge

$$\{e_0 \mid e = (v, w) \in E, w \in V\} \cup \{e_1 \mid e = (w, v) \in E, w \in V\}$$

miteinander.

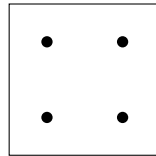
Eine andere Möglichkeit ist es, den Graphen in einen geeigneten Raum einzubetten. Dies geht für \mathbb{R}^2 nicht mit jedem Graphen (sondern nur mit sogenannten *planaren* Graphen); wohl aber für \mathbb{R}^3 : Man platziere die Knoten V entlang einer Achse. Aus dem Ebenenbündel um diese Achse wählen wir für jede Kante eine Ebene und betten diese Kante als Bogen in dieser Ebene zwischen den beiden Knoten ein (siehe Abbildung I.4). Der Graph ist nun eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 und kann somit mit der Relativtopologie versehen werden.

2. Die Fundamentalgruppe von T_n

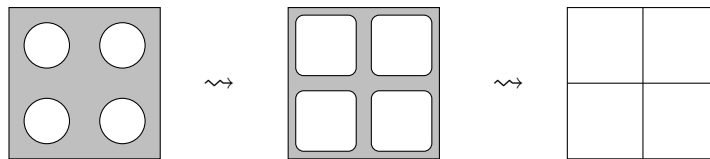
Die Begriffe passen zusammen: Jeder Pfad im Sinne von Definition I.2.8 ist auch ein (topologischer) Weg. Daher ist ein zusammenhängender Graph im graphtheoretischen Sinne auch wegzusammenhängend im topologischen Sinne. Ein Weg im topologischen Sinne ist jedoch nicht immer ein Pfad: Pfade gehen von Knoten zu Knoten, während Wege sich auch zwischen den Knoten bewegen dürfen.

Nun können wir einen Deformationsretrakt für T_n konstruieren. Wir werden die Konstruktion hier am Beispiel von T_2 durchführen.

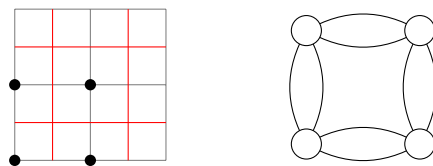
Der n -Torus hat n^2 viele Löcher, die wir mittig anordnen können:



Nun können wir die Löcher um die Gitterpunkte stetig vergrößern (hier ist die Fläche schattiert):



Wir erhalten also einen dem $n \times n$ -Gitter entsprechenden Graphen, wobei zu beachten ist, dass hier die äußeren gegenüberliegenden Kanten miteinander identifiziert sind. Diese Konstruktion produziert für jeden n -Torus einen entsprechenden Gittergraphen als Deformationsretrakt. Wenn wir diesen Graphen als Teilmenge auf den ursprünglichen Torus einzeichnen, erhalten wir folgende Abbildung:



Der Graph ist hier in rot eingezeichnet; wie zuvor gilt die Konvention, dass gegenüberliegende Seiten des Torus und Kanten des Graphen miteinander identifiziert werden. Der Graph bildet also ein duales Gitter zu dem Gitter, auf welchem die ausgenommenen Punkte liegen. Rechts daneben sieht man den Graphen planar (ohne Verklebungen) in die Ebene eingezeichnet.

Da dieser Graph ein Deformationsretrakt von T_n ist, reicht es, wenn wir die Fundamentalgruppe des Graphen bestimmen. Hierzu verwenden wir ein bekanntes Resultat aus der algebraischen Topologie.

Lemma I.2.10: *Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $H = (V', E')$ ein Spannbaum von G , d.h. ein Teilgraph, welcher alle Knoten von G enthält und ein Baum ist. Dann gilt:*

- $\pi_1(G) \cong F_{|E \setminus E'|}$, wobei F_k die freie Gruppe in k Erzeugern bezeichnet.
- Jede Kante aus $E \setminus E'$ induziert genau einen Erzeuger der Fundamentalgruppe wie folgt:

Wir wählen einen Basispunkt $v \in V$. Sei $e = (u, w) \in E \setminus E'$ eine Kante, welche nicht im Spannbaum enthalten ist. Da H ein Baum ist, gibt es einen eindeutigen einfachen Pfad von v nach u und von w nach v . Dann ist der Pfad

$$v \rightsquigarrow u \rightsquigarrow w \rightsquigarrow v$$

ein Erzeuger der Fundamentalgruppe $\pi_1(G, v)$.

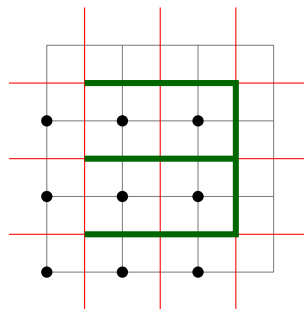
Beweis: Siehe [Hat02, Proposition 1A.2]. □

Mit diesem Lemma und der vorangegangenen Konstruktion können wir nun die Fundamentalgruppe von T_n bestimmen.

Satz I.2.11: *Es gilt*

$$\pi_1(T_n) \cong F_{n^2+1}.$$

Beweis: Wir betrachten den oben konstruierten Graphen, den wir als Deformationsretrakt von T_n erhalten. Als Spannbaum des Graphen wählen wir einen Kamm, bestehend aus $n - 1$ vertikalen Kanten und n horizontalen Wegen aus jeweils $n - 1$ horizontalen Kanten wie im folgenden Bild (mit $n = 3$) grün markiert:

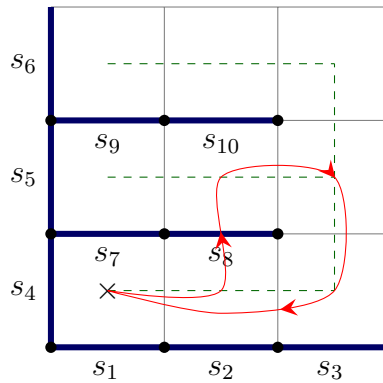


2. Die Fundamentalgruppe von T_n

Man prüft direkt, dass dies ein Spannbaum ist. Dieser hat $(n-1) + n(n-1) = n^2 - 1$ Kanten. Der gesamte Graph hat n^2 horizontale und n^2 vertikale Kanten, insgesamt also $2n^2$. Wir erhalten damit $n^2 - (n^2 - 1) = n^2 + 1$ Kanten im Spannbaum. \square

Mit dieser Methode haben wir jedoch die Fundamentalgruppe nicht nur abstrakt, sondern auch konkret bestimmt. Wir können eine Basis direkt angeben.

Definition I.2.12 (Basis \mathcal{B} („Schlitze“)): Jede Kante des obigen Graphen, welche nicht im Spannbaum enthalten ist, überquert genau eine Kante des von den ausgenommenen Punkten aufgespanntem Gitter (in der folgenden Skizze in blau zu sehen):



Nach obiger Konstruktion induziert jede dieser Kanten, die wir fortan *Schlitze* nennen, einen Erzeuger der Fundamentalgruppe. Wenn \times der Basispunkt ist, dann besteht dieser Erzeuger aus einem Weg von \times auf dem Spannbaum, über den Schlitz quer und auf dem Spannbaum wieder zurück. Die obige Abbildung zeigt beispielsweise den Weg s_8 .

Wir setzen $N := \text{Rang}(\pi_1(T_n)) = n^2 + 1$ und bezeichnen mit

$$B := \{s_1, \dots, s_N\}$$

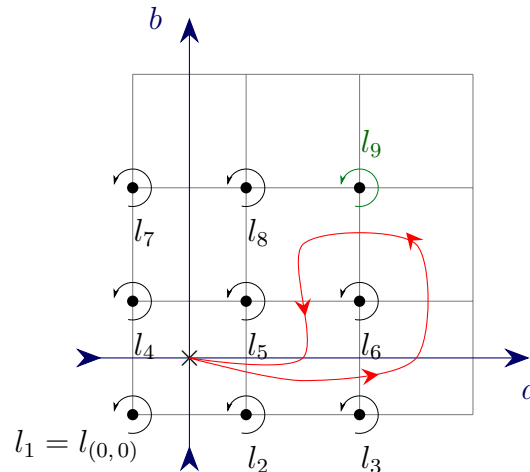
diese Basis.

Konvention Falls nicht anders erwähnt betrachten wir ab sofort den Mittelpunkt des unteren linken Kästchens (bei $(1/2, 1/2)$; in obiger Grafik mit \times markiert) als Basispunkt. Die Erzeuger von \mathcal{B} wählen wir immer so, dass wir die Schlitze von unten nach oben und von links nach rechts überqueren.

Die Schlitz nummerieren wir wie in der Grafik: Zunächst die n horizontalen Schlitz unten, dann die n vertikalen Schlitz links, dann die $(n - 1)^2$ horizontalen Schlitz in der Mitte.

Es wird sich als nützlich erweisen, eine weitere Basis zur Verfügung zu haben. Einige Dinge lassen sich besser mit der einen, andere mit der anderen Basis berechnen.

Definition I.2.13 (Basis \mathcal{S} („Schleifen“)):



Wir fixieren den gleichen Basispunkt, wie oben (bei $(1/2, 1/2)$). Wir definieren die Wege a, b sowie für $(x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ die Wege $l_{(x,y)}$ wie folgt:

- a ist der horizontale Weg vom Basispunkt aus nach rechts.
- b ist der vertikale Weg vom Basispunkt aus nach oben.
- Die $l_{(x,y)}$ sind Schleifen gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt (x, y) .
Wir müssen hierbei einen Weg fixieren, der vom Basispunkt zu der Mitte des Kästchens unmittelbar unten links von dem Punkt der Schleife (der Punkt mit Koordinaten $(x - 1/2, y - 1/2)$) führt. Dann laufen wir die 4 Kästchen um den Punkt (x, y) herum und anschließend auf dem gleichen Weg wieder zurück zum Basispunkt.
- Wir nummerieren die Schleifen beginnend mit 1 von links nach rechts und von unten nach oben (wie in der Abbildung) durch. Somit gilt dann

$$l_i := l_{(x,y)} \quad \text{mit} \quad x := (i - 1) \bmod n \quad \text{und} \quad y := \lfloor (i - 1)/n \rfloor.$$

Der Weg vom Basispunkt zu den Schleifen hin und wieder zurück ist keinesfalls kanonisch, sondern kann beliebig gewählt werden. Wir fixieren hier eine

beliebige Wahl eines solchen Weges für jede Schleife l_i . Eine andere Wahl führt lediglich zu einer Konjugation. Später werden wir uns auf die Abelisierung von $\pi_1(T_n)$ beschränken, daher spielt das dann keine Rolle mehr. Die obige Abbildung zeigt beispielsweise eine mögliche Wahl des Weges l_6 .

Wir schreiben $\mathcal{S} = \{a, b, l_1, \dots, l_{n^2-1}\}$.

Bemerkung I.2.14: Die Definition schließt die Schleife l_{n^2} explizit aus; sie ist nicht Teil des Erzeugendensystems. Tatsächlich haben wir mit den beiden Wegen a und b sowie mit $n^2 - 1$ Schleifen bereits die nötige Anzahl (nämlich $N = n^2 + 1$) an Erzeugern; jeder weitere Weg wäre überflüssig.

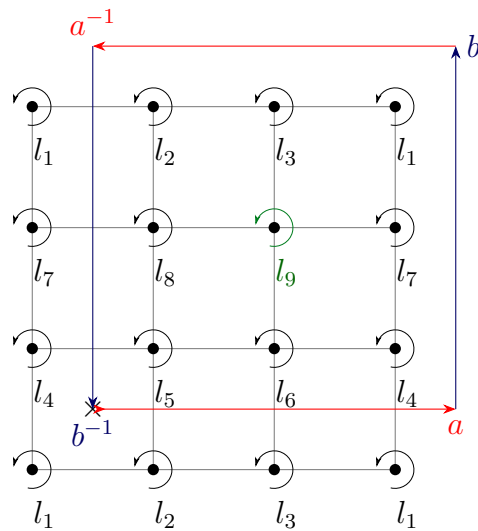


Abbildung I.5.: Das Ablaufen aller Schleifen in der richtigen Reihenfolge ist äquivalent zu $aba^{-1}b^{-1}$

Wir können l_{n^2} auch explizit durch die anderen Schleifen ausdrücken. Dazu überlegen wir, was passiert, wenn wir alle Schleifen l_1, \dots, l_{n^2} nacheinander ablaufen. Wir beginnen jedoch nicht mit $l_{(0,0)}$, sondern mit $l_{(1,1)}$, und laufen dann die Schleifen wie in Abbildung I.5 ab. Genauer: Wir definieren die Permutation σ , die die Schleife $l_{(x,y)}$ schickt auf die Schleife $l_{(x+1,y+1)}$ und laufen dann die Schleifen in dieser Permutation ab.

Der Weg, der so entsteht, ist homotop zu dem „Ablaufen des Randes“ (vgl. Abbildung I.5). Wir erhalten also die Relation

$$\sigma(l_1) \cdot \dots \cdot \sigma(l_{n^2}) = aba^{-1}b^{-1}.$$

In der Abelisierung $\pi_1(T_n)^{\text{ab}}$, welche später noch nützlich wird, vereinfacht es sich zu

$$l_{n^2} = (l_1 \cdot \dots \cdot l_{n^2-1})^{-1}.$$

Diese Darstellung wird später noch von Nutzen sein.

3. Bestimmung der Basiswechselmatrix $D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$

Da wir nun zwei Erzeugendensysteme haben, möchten wir gerne zwischen den beiden wechseln können. Beispielsweise haben wir bei $n = 3$ die Entsprechungen

$$\begin{aligned} l_4 \text{ ist konjugiert zu } s_4 \cdot s_7 \cdot s_5^{-1}, \\ l_7 \text{ ist konjugiert zu } s_5 \cdot s_9 \cdot s_6^{-1}. \end{aligned}$$

Dies kann man leicht einsehen: Beim Ablaufen der Schleife l_4 überquert man s_4 gefolgt von s_7 und schließlich s_5 in die falsche Richtung (analog bei l_7). Die Wege sind lediglich konjugiert zueinander, da wir keine kanonische Wahl der Wege vom Basispunkt zu den Schleifen gewählt hatten. Wir würden nun gerne einen Algorithmus haben, um für beliebige Erzeuger die Entsprechung in der anderen Basis zu finden.

Wir machen es uns ein wenig leichter, wenn wir uns dabei auf die *Abelisierung* von $\pi_1(T_n)$ beschränken. Dies ist die *Homologie* $H_1(T_n, \mathbb{Z})$. Wir schreiben ab hier kurz $H_1(T_n)$ und bezeichnen ab hier mit a, b, s_i, l_i immer die Schleifen *in der Homologie*. Nach Satz I.2.11 ist $\pi_1(T_n)$ isomorph zu F_N und wir können daher nach Wahl einer Basis die Abelisierung $H_1(T_n)$ mit \mathbb{Z}^N identifizieren. Das bedeutet, dass jede Schleife einem N -Vektor mit Einträgen aus \mathbb{Z} entspricht. Hierbei ist die Reihenfolge der Basiselemente wichtig. Wir wählen für \mathcal{B} die Reihenfolge s_1, \dots, s_N und für \mathcal{S} die Reihenfolge $a, b, l_1, \dots, l_{n^2-1}$.

Wenn wir beispielsweise \mathcal{B} betrachten, so entspricht

$$l_7 \cdot l_4 = s_5 \cdot s_9 \cdot s_6^{-1} \cdot s_4 \cdot s_7 \cdot s_5^{-1}.$$

in der Abelisierung dem Vektor $e_4 - e_6 + e_7 + e_9$ (hierbei ist e_i der i -te Einheitsvektor). Bezüglich \mathcal{S} entspricht derselbe Weg dem Vektor $e_6 + e_9$.

3. Bestimmung der Basiswechsellmatrix $D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$

Wir betrachten das folgende Diagramm in der Kategorie der Gruppen:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(T_n) & \\
 \text{via } \mathcal{S} \swarrow & & \searrow \text{via } \mathcal{B} \\
 F_N & \xrightarrow{\quad} & F_N \\
 \text{ab} \downarrow & & \downarrow \text{ab} \\
 \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{\quad D_{\mathcal{B}\mathcal{S}} \quad} & \mathbb{Z}^N
 \end{array}$$

Wir suchen hierbei die Abbildung $D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$, sodass das Diagramm kommutiert. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus von abelschen Gruppen, also eine lineare Abbildung zwischen \mathbb{Z} -Moduln. Wir können sie bestimmen, indem wir wie im obigen Beispiel vorgehen: Wir schreiben jeden Erzeuger $g \in \mathcal{S}$ als Wort in \mathcal{B} und lesen anhand der Exponenten den entsprechenden Vektor in der Abelisierung ab. Für $n = 2$ ist die so konstruierte Matrix in Abbildung I.6 gegeben.

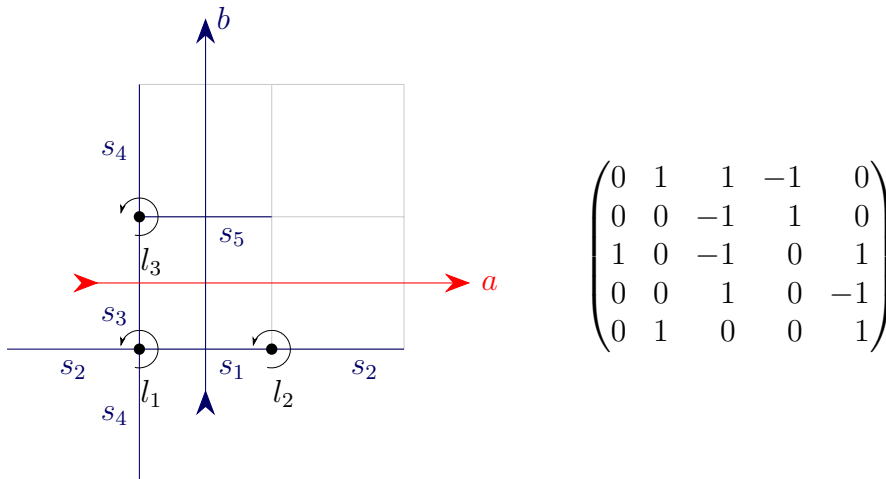


Abbildung I.6.: Konstruktion von $D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$ für $n = 2$. Man kann anhand der Abbildung ablesen, welche Schlitze von a , b bzw. den Schleifen überquert werden.

Wir betrachten die Erzeuger von \mathcal{S} einzeln. Der horizontale Weg a überquert nur den Schlitz s_{n+1} . Der vertikale Weg b überquert die n Schlitze

$$s_1, s_{2n+0 \cdot (n-1)+1}, \dots, s_{2n+(n-2) \cdot (n-1)+1}.$$

Die Schleife l_1 im Nullpunkt überquert die vier Schlitze $s_1, s_{n+1}^{-1}, s_n^{-1}, s_{2n}$. Die Schleifen am linken Rand überqueren jeweils drei Schlitze. Alle anderen Schleifen überqueren zwei oder einen Schlitz.

Der Algorithmus, der hierbei herauskommt, ist im Folgenden gegeben.

Algorithmus 1: Bestimmung von D_{BS}

```

1 BaseChangeSToB := function(n)
2 local N, mat, i, j, k, loopIndex;
3 N := n * n + 1;
4 mat := [];
5 # "a" crosses s_{n+1}
6 mat[1] := List([1..N], i->0);
7 mat[1][n+1] := 1;
8 # "b" crosses the leftmost horizontal slits
9 mat[2] := List([1..N], i->0);
10 mat[2][1] := 1;
11 for i in [0..n-2] do
12     mat[2][2 * n + 1 + i * (n - 1)] := 1;
13 od;
14 # the origin loop crosses 4 slits
15 mat[3] := List([1..N], i->0);
16 mat[3][1] := 1;
17 mat[3][n+1] := -1;
18 mat[3][n] := -1;
19 mat[3][2*n] := 1;
20 # the loops at the left edge cross 3 slits
21 for i in [1..n-1] do
22     loopIndex := 1 + i * n;
23     mat[2 + loopIndex] := List([1..N], i->0);
24     # the horizontal slit is crossed bottom up
25     mat[2 + loopIndex][2 * n + 1 + (i-1) * (n-1)] := 1;
26     # lower vertical slit crossed left to right
27     mat[2 + loopIndex][i + n] := 1;
28     # upper vertical slit crossed right to left
29     mat[2 + loopIndex][i + n + 1] := -1;
30 od;
31 # the loops at the bottom edge
32 for i in [2..n] do
33     mat[2 + i] := List([1..N], i->0);
34     mat[2 + i][i] := 1;

```


4. Klassifikation der normalen zyklischen Überlagerungen des T_n

```
35     mat[2 + i][i-1] := -1;
36 od;
37 # the loops in the middle cross one or two slits
38 for i in [1..n-1] do
39     for j in [1..n-1] do
40         if i = n-1 and j = n-1 then continue; fi;
41         loopIndex := i * n + j + 1;
42         mat[2 + loopIndex] := List([1..N], i->0);
43         k := 2 * n + (i-1) * (n-1) + j ;
44         mat[2 + loopIndex][k] := -1;
45         if j < n-1 then
46             mat[2 + loopIndex][k+1] := 1;
47         fi;
48     od;
49 od;
50
51 # since we used the first index as the column, transpose
52 return TransposedMat(mat);
53 end;
```

4. Klassifikation der normalen zyklischen Überlagerungen des T_n

Da wir nun die Fundamentalgruppe von T_n bestimmt haben, können wir uns den Überlagerungen von T_n widmen. Wir definieren zunächst unsere gesuchte Klasse von Überlagerungen.

Definition I.4.1 (Der Raum \mathcal{C}): Seien $n, d \in \mathbb{N}^+$. Wir betrachten die Klasse der Überlagerungen $p: X \rightarrow T_n$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Überlagerung ist normal.
- Es gilt $\text{Deck}(X/T_n) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Die Menge² dieser Überlagerungen bis auf Äquivalenz heiße \mathcal{C}_n^d . Wir fixieren ab sofort ein n und ein d und schreiben nur noch \mathcal{C} . Außerdem schreiben wir ab sofort wieder $N := \text{Rang}(\pi_1(T_n)) = n^2 + 1$.

²Da wir die Überlagerungen nur bis auf Isomorphie betrachten, ist das tatsächlich eine Menge und keine echte Klasse. Wie wir sehen werden, ist diese Menge sogar endlich.

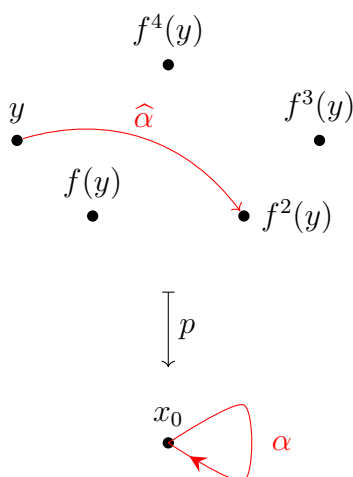


Abbildung I.7.: Die Liftung $\hat{\alpha}$ einer Schleife α resultiert im 2-fachen Wechsel des Urbildes. Hier haben wir also $m(\alpha) = f^2$.

In diesem Abschnitt ist es unser Ziel, solche Überlagerungen zu klassifizieren. Wir werden hierfür zentral den Satz über die universelle Überlagerung (Satz I.1.11) verwenden. Teil (iii) und (iv) implizieren einen Gruppenhomomorphismus

$$m : \pi_1(T_n) \rightarrow \pi_1(T_n) / \pi_1(X) \cong \text{Deck}(X/T_n) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Diesen Homomorphismus wollen wir nun näher betrachten. Wir fixieren einen beliebigen Basispunkt $x_0 \in T_n$ und eine Schleife $\alpha \in \pi_1(T_n, x_0)$. Da die Überlagerung normal ist, und zudem die Deck-Gruppe von einem Element f erzeugt wird, können wir die Faser von x_0 schreiben als

$$p^{-1}(x_0) = \{y, f(y), \dots, f^{d-1}(y)\}.$$

Was passiert nun, wenn wir die Schleife α in y liften? Der Endpunkt der Liftung muss keineswegs wieder y sein (d.h. die Liftung muss keine Schleife sein), es ist jedoch immer ein Urbild $f^k(y)$ für ein $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. In Abbildung I.7 ist ein Beispiel zu sehen; hier ist $d = 5$ und $k = 2$.

Als Teil des Beweises von Satz I.1.11 zeigt man, dass diese Zahl k (bzw. die Decktransformation f^k) nicht davon abhängt, welche Faser man als Startpunkt nimmt. Mit anderen Worten: Für jedes $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ erhalten wir ein $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, welches uns angibt, „wie viele Kopien wir wechseln“, wenn wir entlang der Liftung von α laufen. Die Abbildung m_{p, x_0} (zu einer gegebenen Überlagerung p und einem Basispunkt x_0) gibt uns für jede Schleife die

4. Klassifikation der normalen zyklischen Überlagerungen des T_n

Decktransformation f^k und heißt *Monodromieabbildung*. Im obigen Beispiel wäre also $m_{p,x_0}(\alpha) = 2$.

Falls eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ nicht notwendigerweise normal ist, so ist die Monodromie zunächst einmal lediglich eine Abbildung in die Symmetriegruppe der Fasern von x_0 :

$$m_{p,x_0} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Sym}(p^{-1}(x_0))$$

Hierbei bildet $m_{p,x_0}(\alpha)$ den Punkt $y \in p^{-1}(x_0)$ auf den Endpunkt des Lifts von α in y ab. Die Monodromie ist ein *Antihomomorphismus*:

$$m(\alpha * \beta) = m(\beta) \circ m(\alpha)$$

Intuition (Darstellung von Überlagerungen in \mathcal{C} durch Vektoren):

Über die Monodromieabbildung m_{p,x_0} können wir eine Überlagerung wie folgt als Vektor in $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N$ darstellen: Wir fixieren eine Basis $B = \{g_1, \dots, g_N\}$ von $\pi_1(T_n, x_0)$. Offenbar genügt es, die Werte für m_{p,x_0} für die Basiselemente zu wissen. Wir setzen daher unseren Vektor als

$$(m_{p,x_0}(g_1), \dots, m_{p,x_0}(g_N)).$$

Diese Darstellung hängt sowohl von der Basis ab, als auch davon, welchen Erzeuger von $\text{Deck}(X/T_n)$ wir wählen. Sie ist also nicht eindeutig.

Diese Intuition werden wir in dem folgenden Satz präzisieren.

Satz I.4.2 (Klassifikation von \mathcal{C}): *Definiere auf*

$$\mathcal{T} := \{(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N \mid \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\}$$

die Äquivalenzrelation \sim durch

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_N) &\sim (w_1, \dots, w_N) \\ &: \iff \exists a \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times : (a \cdot v_1, \dots, a \cdot v_N) = (w_1, \dots, w_N). \end{aligned}$$

Sei $B = \{g_1, \dots, g_N\}$ eine Basis von $\pi_1(T_n)$. Es gilt die Bijektion

$$D_B : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{T}_\sim \quad p \mapsto [(m_p(g_1), \dots, m_p(g_N))]_\sim,$$

wobei m_p die Monodromieabbildung von p ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der Abbildung. Die Monodromie ist eine Abbildung in die Deck-Gruppe. Wir fixieren einen Isomorphismus $\text{Deck}(X/T_n) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ über einen Erzeuger f und betrachten somit $m_p(g_i)$ als ein Element aus $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Eine andere Wahl des Erzeugers würde lediglich zu einem Automorphismus auf $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^N$ führen. Somit ist das Tupel

$$[(m_p(g_1), \dots, m_p(g_N))]_{\sim}$$

unabhängig von dem gewählten Erzeuger.

Da die Monodromieabbildung die in Satz I.1.11, Teil (iii) und (iv) implizierte Abbildung

$$m_p : \pi_1(T_n) \rightarrow \pi_1(T_n) / \pi_1(X) \cong \text{Deck}(X/T_n)$$

ist, ist sie als Komposition surjektiver Abbildungen surjektiv. Daher ist das Tupel erzeugend und somit D_B wohldefiniert.

Sei nun umgekehrt $[(v_i)]_{\sim}$ ein solches Tupel. Da F_N frei ist, induziert die Abbildung $g_i \mapsto v_i$ einen Gruppenhomomorphismus $\alpha_v : F_N \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Wir definieren nun H als dessen Kern. Nach dem Homomorphiesatz (man beachte, dass α_v surjektiv ist, da v erzeugend war) gilt dann

$$F_N / H \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Die Abbildung α_v hängt von dem gewählten Vertreter $(v_i) \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^N$ ab; der Kern jedoch nicht, denn die Multiplikation mit $c \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ ist ein Automorphismus und somit gilt $\text{Kern}(\alpha_v) = \text{Kern}(\alpha_{cv})$.

Wir erhalten durch den Normalteiler H somit nach Satz I.1.11 (iii) eine Äquivalenzklasse von Überlagerungen p .

Wir rechnen nach, dass die beiden Zuordnungen invers zueinander sind:

- Sei $p : X \rightarrow T_n$ eine Überlagerung und $\pi_1(X)$ der zugehörige Normalteiler in $\pi_1(T_n)$. Es gilt $\text{Kern}(m_p) = \pi_1(X)$.
Falls nun $v_i = m_p(g_i)$ ist, dann ist $\alpha_v(g_i) = v_i = m_p(g_i)$ und somit

$$\text{Kern}(\alpha_v) = \text{Kern}(m_p) = \pi_1(X).$$

Wir erhalten nach dem Satz über die universelle Überlagerung eine zu p isomorphe Überlagerung.

- Sei $[(v_i)] \in \mathcal{T}_{\sim}$. Nach obiger Konstruktion erhalten wir als Normalteiler $\text{Kern}(\alpha_v)$. Die dazugehörige Monodromieabbildung hat die Form

$$m : \pi_1(T_n) \rightarrow \pi_1(T_n) / \text{Kern}(\alpha_v).$$

4. Klassifikation der normalen zyklischen Überlagerungen des T_n

Somit sind m und α_v bis auf einen Automorphismus von $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (d.h. eine Multiplikation mit einem $c \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$) identisch und es gilt

$$\begin{aligned} [(m_p(g_1), \dots, m_p(g_N))]_{\sim} &= [(c \cdot \alpha_v(g_1), \dots, c \cdot \alpha_v(g_N))]_{\sim} = \\ &= [(\alpha_v(g_1), \dots, \alpha_v(g_N))]_{\sim} = [(v_1, \dots, v_N)]_{\sim}. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung I.4.3: Diese Zuordnung D_B hängt von der gewählten Basis B ab. Wir können zum Beispiel die Basen \mathcal{B} oder \mathcal{S} aus Abschnitt 2 wählen.

Um zwischen den Basen zu wechseln, können wir die bereits berechnete Matrix $D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$ verwenden. Allerdings müssen wir beachten, dass unsere Vektoren eigentlich von einer Abbildung $F_N \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ kommen. Da $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ abelsch ist, können wir die Vektoren auch als (lineare) Abbildung

$$H_1(T_n) \cong \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

auffassen. Wir stellen unsere Überlagerungen also durch Elemente aus dem *Dualraum der Homologie*³ dar. Daher werden wir ab sofort solche Vektoren immer als Zeilenvektoren auffassen. Wenn $D_{\mathcal{S}}(p)$ und $D_{\mathcal{B}}(p)$ die Vektoren einer Überlagerung p bezüglich \mathcal{S} bzw. \mathcal{B} sind, dann befinden wir uns in der folgenden Situation:

$$\begin{array}{ccc} & H_1(T_n) & \\ \text{via } \mathcal{S} \swarrow & & \searrow \text{via } \mathcal{B} \\ \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}} & \mathbb{Z}^N \\ \swarrow D_{\mathcal{S}}(p) & & \searrow D_{\mathcal{B}}(p) \\ & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \end{array}$$

Dies impliziert, dass wir für ein $p \in \mathcal{C}$ wie folgt zwischen den Basen wechseln können:

$$D_{\mathcal{B}}(p) = D_{\mathcal{S}}(p) \cdot D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}^{-1}$$

Beispiel I.4.4: Sei $d = 3$, $n = 2$ (also $N = n^2 + 1 = 5$) und $B = \{x, y, z, g, h\}$ eine Basis von $\pi_1(T_n)$. Wir betrachten den folgenden Beispielvektor:

$$(0, 1, 2, 2, 1) \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N$$

³Eigentlich ist der Dualraum der Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$, aber für unsere Zwecke können wir uns auf $\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ beschränken.

Dann ist die Äquivalenzklasse $[v]_{\sim}$ gegeben durch

$$\{v, 2v\} = \{(0, 1, 2, 2, 1), (0, 2, 1, 1, 2)\}.$$

Der im Satz I.4.2 berechnete Normalteiler H ergibt sich als

$$\text{Kern} \begin{pmatrix} x & y & z & g & h \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit GAP kann man ihn konkret ausrechnen:

$$H = \left\langle x, zy, (yz)^{-1}, gy, (yg)^{-1}, hy^{-1}, h^{-1}y, yxy^{-1}, y^3, yz^{-1}y, yg^{-1}y, yhy, y^{-1}xy \right\rangle$$

Dies ist nach Satz I.1.11 gerade die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$. Wie können wir uns diese Fläche X vorstellen? Hierzu nehmen wir an, dass \mathcal{B} die Schlitz-Basis \mathcal{B} ist (also $x = s_1, \dots, h = s_5$). Dann können wir X veranschaulichen, indem wir d Kopien von T_n nehmen, und so verkleben, dass das Überqueren von s_i gerade v_i -viele Kopien wechselt (siehe Abbildung I.8).

Um den Vektor der Überlagerung bezüglich \mathcal{S} zu erhalten, können wir einen Basiswechsel durchführen:

$$v \cdot D_{\mathcal{B}\mathcal{S}} = (2, 1, 2, 1, 1)$$

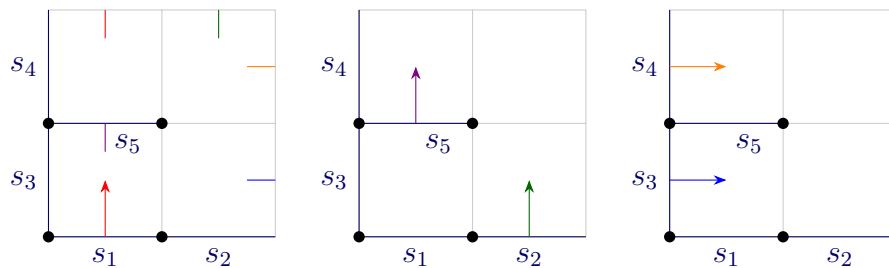


Abbildung I.8.: Die Fläche X aus Beispiel I.4.4. Gegenüberliegende Kanten sind weiterhin zusammengeklebt, jedoch wechselt man bei dem Überqueren der Schlitzte die Kopien.

Die Größe von \mathcal{C}

Es stellt sich die Frage, wie viele Elemente in \mathcal{C} eigentlich enthalten sind. Wir gehen hierbei ähnlich vor, wie David Aulicino in dem Vortrag [Aul20], und drücken diese Anzahl mithilfe der verallgemeinerten Eulerschen Phi-Funktion aus.

Definition I.4.5: Die (verallgemeinerte) Eulersche Phi-Funktion $\varphi_\alpha(k)$ ist für $\alpha \in \mathbb{N}^+$ definiert durch

$$\varphi_\alpha(k) := \#\{(a_1, \dots, a_\alpha) \in \{0, \dots, k-1\}^\alpha \mid \text{ggT}(a_1, \dots, a_\alpha, k) = 1\}.$$

Sie zählt also die Anzahl der α -Tupel von natürlichen Zahlen kleiner als k , sodass diese Zahlen zusammen mit k koprim sind. Im Fall $\alpha = 1$ handelt es sich hierbei um die allgemein bekannte klassische Eulersche Phi-Funktion.

Proposition I.4.6: *Es gilt*

$$|\mathcal{C}_n^d| = \frac{\varphi_N(d)}{\varphi_1(d)}.$$

Beweis: Sei $v = (v_1, \dots, v_N) \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N$. Wir betrachten hier v_i als ein Element in \mathbb{Z} und wählen den Vertreter in $[0, d-1]$. Zunächst merken wir an, dass v genau dann $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ erzeugt, wenn der größte gemeinsame Teiler der v_i zusammen mit d gleich 1 ist. Dies sieht man direkt Anhand des Lemmas von Bézout.

Weiterhin operiert $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ frei auf den erzeugenden Tupeln \mathcal{T} durch Multiplikation. Sei nämlich $g := \text{ggT}(v_1, \dots, v_N)$. Es gelte $a \cdot v_i \equiv v_i$ für alle i . Durch Linearkombination der Kongruenzen erhält man $a \cdot g \equiv g$. Da das Tupel erzeugend ist, ist g teilerfremd zu d und es folgt $a \equiv 1$. Somit ist die Operation frei und es gilt

$$|\mathcal{T}_\sim| = \frac{|\mathcal{T}|}{|(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times|} = \frac{\varphi_N(d)}{\varphi_1(d)}. \quad \square$$

Korollar I.4.7: *Sei p prim und $d = p^k$ für ein $k \in \mathbb{N}^+$. Dann gilt:*

$$|\mathcal{C}_n^d| = p^{(N-1)(k-1)} \cdot \frac{p^N - 1}{p - 1} \quad \text{mit } N := n^2 + 1.$$

Beweis: Wir zählen $|\mathcal{T}| = \varphi_N(d)$. Dazu betrachten wir die Tupel, welche *nicht* erzeugend sind. Wegen $d = p^k$ sind das genau die Tupel (v_1, \dots, v_N) , bei denen jede Komponente v_i durch p teilbar ist. Wir können also schließen:

$$|\mathcal{T}| = d^N - \left(\frac{d}{p}\right)^N = p^{Nk} - p^{N(k-1)} = p^{N(k-1)}(p^N - 1)$$

Kapitel I. Der Raum der Überlagerungen des $(n \times n)$ -Torus

Außerdem gilt $\varphi_1(d) = \varphi_1(p^k) = p^{k-1} \cdot (p-1)$ und somit insgesamt

$$|C_n^d| = \frac{p^{N(k-1)}(p^N - 1)}{p^{k-1} \cdot (p-1)} = p^{(N-1)(k-1)} \cdot \frac{p^N - 1}{p-1}. \quad \square$$

Kapitel II.

Der Raum der zyklisch faktorisierten Origamis \mathcal{O}

In diesem Kapitel widmen wir uns dem Studium von Origamis, die von den Überlagerungen aus \mathcal{C}_n^d induziert werden. Wir werden dabei untersuchen, wann zwei solcher Überlagerungen zu äquivalenten Origamis führen und schließlich eine Klassifikation wie im vorangegangenen Kapitel durchführen.

1. Permutationsdarstellung von Origamis

Wir erinnern uns, dass die Monodromiefunktion m für eine nicht notwendigerweise normale Überlagerung (wie es Origamis im Allgemeinen sind) eine Funktion in die Symmetriegruppe der Faser ist. Wir setzen nun x_0 als den Mittelpunkt von T und betrachten ein Origami $o : X \rightarrow T$ von Grad k . Dann können wir die Symmetriegruppe der Fasern mit der symmetrischen Gruppe S_k in k -Elementen identifizieren. Die Monodromieabbildung von o in x_0 ist dann eine Abbildung

$$m_{x_0} : \pi_1(T, x_0) \rightarrow S_k.$$

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(T, x_0)$ ist nach Satz I.2.11 die freie Gruppe von Rang 2. Die Basen \mathcal{S} und \mathcal{B} stimmen in diesem Fall überein und wir erhalten die beiden Erzeuger $s_1 = a$ (der horizontale Weg) und $s_2 = b$ (der vertikale Weg). Die Monodromieabbildung ist also eindeutig bestimmt durch die Bilder von a und b . Wir erhalten für das Origami o somit zwei Permutationen:

$$\sigma_x := m_{x_0}(a) \quad \sigma_y := m_{x_0}(b)$$

Geometrisch gesehen können wir diese Permutationen anhand der Verklebungen der nummerierten Quadrate (vgl. Abbildung I.3) ablesen. Dabei gibt

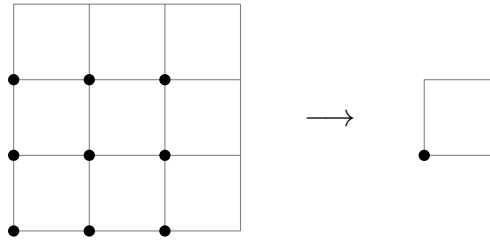


Abbildung II.1.: Die Abbildung $p_3 : T_3 \rightarrow T$

$\sigma_x(i)$ den rechten Nachbar und $\sigma_y(i)$ den oberen Nachbar des Quadrates i an. Das Permutationspaar (σ_x, σ_y) ist nicht eindeutig, denn die Quadrate können auch anders nummeriert werden. Eine Umnummerierung entspricht jedoch lediglich einer simultanen Konjugation der beiden Permutationen mit einer Permutation $\tau \in S_k$:

$$\sigma'_x = \tau \sigma_x \tau^{-1} \quad \sigma'_y = \tau \sigma_y \tau^{-1}$$

2. Das induzierte Origami

Da wir nun wissen, wie wir Origamis durch Permutationen darstellen können, möchten wir gerne einige Origamis konstruieren. Wir beginnen mit einem einfachen, aber wichtigen Beispiel für ein Origami.

Beispiel II.2.1: Wir betrachten die Überlagerung $p_n : T_n \rightarrow T$, die entsteht, indem alle Quadrate von T_n auf eines geschickt werden (vgl. Abbildung II.1). Diese Überlagerung

- hat Grad n^2 ,
- hat die Deck-Gruppe $\langle t_x, t_y \rangle = \text{Deck}(T_n/T) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, welche erzeugt wird von der Verschiebung um ein Kästchen nach rechts bzw. nach oben t_x und t_y ,
- ist normal und
- hat die Permutationsdarstellung

$$\begin{aligned} \sigma_x &:= (1, \dots, n)(n+1, \dots, 2n) \dots (n^2 - n + 1, \dots, n^2), \\ \sigma_y &:= (1, n+1, \dots, n^2 - n + 1) \dots (n, 2n, \dots, n^2). \end{aligned}$$

Eine naheliegende Konstruktion ist es nun, eine Überlagerung $q : X \rightarrow T_n$ mit dieser natürlichen Überlagerung $p_n : T_n \rightarrow T$ zu verketten und so ein

Origami zu erhalten, welches man dann weiter untersuchen kann:

$$o : X \xrightarrow{q} T_n \xrightarrow{p_n} T.$$

Dabei müssen wir jedoch vorsichtig sein, denn es ist nicht direkt ersichtlich, dass diese Komposition wieder eine Überlagerung ist. Das folgende Lemma stellt es jedoch sicher.

Lemma II.2.2: *Seien $p : X \rightarrow Y$ und $q : Y \rightarrow Z$ Überlagerungen und q habe endlichen Grad. Dann ist die Komposition*

$$q \circ p : X \rightarrow Z$$

ebenfalls eine Überlagerung.

Beweis: Sei $z \in Z$. Wir suchen nun eine geeignete Überlagerungsumgebung $W \ni z$ für die Komposition $q \circ p$.

Vermöge q hat z eine Überlagerungsumgebung U und (endlich viele) Urbilder $y_i \in V_i \subseteq Y$. Jedes dieser Urbilder hat wiederum eine eigene Überlagerungsumgebung U_i bezüglich p . Wir können dieses U_i dabei klein genug wählen, sodass es in V_i enthalten ist. Wir setzen

$$W := \bigcap q(U_i).$$

Da $q|_{V_i}$ ein Homöomorphismus $V_i \rightarrow U$ und damit eine offene Abbildung ist, ist wegen $U_i \subseteq V_i$ jedes $q(U_i)$ offen. Da der Schnitt endlich ist, ist somit W offen.

Es gilt $W \subseteq U$ und nach Konstruktion ist jedes Urbild von W in einer Überlagerungsumgebung eines y_i enthalten; somit erfüllt es die Eigenschaft einer Überlagerungsumgebung. \square

Mit diesem Lemma können wir nun Origamis konstruieren:

Konstruktion II.2.3 (Das induzierte Origami): Sei $p \in \mathcal{C}$. Durch Komposition mit der Abbildung p_n aus Beispiel II.2.1 erhalten wir ein Origami

$$o : X \xrightarrow{q} T_n \xrightarrow{p_n} T.$$

Offenbar führen isomorphe Überlagerungen aus \mathcal{C} zu isomorphen Origamis. Das folgt aus dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & \searrow q & \swarrow q' \\ & T_n & \\ & \downarrow p_n & \\ & T & \end{array}$$

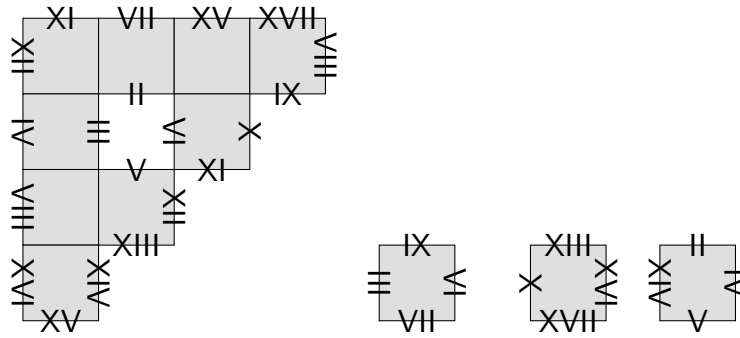


Abbildung II.2.: Das Origami, welches von der durch $(0, 1, 2, 2, 1)$ beschriebenen Überlagerung induziert wird.

Es gilt insbesondere: Falls q isomorph zu q' ist, so ist auch $p_n \circ q$ isomorph zu $p_n \circ q'$. Daher ergibt es Sinn von der Menge der *induzierten Origamis bis auf Isomorphie* zu sprechen. Wir bezeichnen diese Menge mit \mathcal{O}_d^n . Wir fixieren wieder n und d und schreiben nur noch \mathcal{O} .

Beispiel II.2.4: Wir betrachten weiterhin den Vektor $(0, 1, 2, 2, 1)$ aus Beispiel I.4.4. Das induzierte Origami ist eine Überlagerung von Grad $dn^2 = 12$. Wir können dieses Origami wie üblich durch zusammengeklebte Quadrate darstellen, indem wir anhand von Abbildung I.8 ablesen, welche Quadrate mit welchen verklebt sind. Wenn wir die Kästchen in Abbildung I.8 von links nach rechts und unten nach oben nacheinander für alle 3 Kopien beschriften, können wir folgende Permutationen für das Origami ablesen:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (1, 2, 9, 10, 5, 6)(3, 4, 11, 12, 7, 8) \\ \sigma_y &= (1, 7, 5, 11, 9, 3)(2, 4, 6, 8, 10, 12)\end{aligned}$$

Es stellen sich nun folgende Fragen:

1. Können zwei verschiedene T_n -Überlagerungen äquivalente Origamis induzieren? Wenn ja, wann passiert das?
2. Wie können wir den Raum \mathcal{O} beschreiben?

Um die erste Frage zu beantworten, betrachten wir die folgende Operation der Homeomorphismengruppe auf \mathcal{C} .

Definition II.2.5 (Homeomorphismengruppe): Für einen topologischen Raum Y bezeichnen wir mit $\text{Homeo}(Y)$ die Gruppe der Homeomorphismen $Y \rightarrow Y$ (mit Komposition).

Definition II.2.6 (Operation von $\text{Homeo}(T_n)$ auf \mathcal{C}): $\text{Homeo}(T_n)$ operiert durch Komposition auf \mathcal{C} :

$$\text{Homeo}(T_n) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad (t, q) \mapsto t \circ q$$

Dazu haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ q \swarrow & & \searrow t \circ q \\ T_n & \xrightarrow{t} & T_n \end{array}$$

Diese Operation ist wohldefiniert. Denn, falls f eine Isomorphie zwischen $q : X \rightarrow T_n$ und $q' : X' \rightarrow T_n$ ist, so ist sie ebenfalls eine Isomorphie zwischen $t \circ q$ und $t \circ q'$ (vgl. Konstruktion II.2.3).

Bemerkung II.2.7: Insbesondere operiert die Untergruppe

$$\text{Deck}(T_n/T) \subseteq \text{Homeo}(T_n)$$

auf \mathcal{C} . Überlagerungen aus \mathcal{C} , die in derselben $\text{Deck}(T_n/T)$ Bahn liegen, führen zum selben Origami. Seien dazu $q, q' \in \mathcal{C}$ und $t \in \text{Deck}(T_n/T)$ mit $q' \cong t \circ q$, es gibt also eine Isomorphie f zwischen q' und $t \circ q$. Dann haben wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow q' \\ T_n & \xrightarrow{t} & T_n \\ & \searrow p_n & \swarrow p_n \\ & T & \end{array}$$

Hierbei kommutiert das untere Dreieck, da $t \in \text{Deck}(T_n/T)$ ist. Wir sehen also, dass f eine Isomorphie der von q und q' induzierten Origamis ist.

Wir haben also eine hinreichende Bedingung dafür gefunden, dass zwei T_n -Überlagerungen äquivalente Origamis induzieren. Es stellt sich die Frage, ob diese Bedingung auch notwendig ist. Mit dem folgenden Satz können wir diese Frage positiv beantworten.

Satz II.2.8: *Genau dann induzieren Überlagerungen $p : X \rightarrow T_n$ und $p' : X' \rightarrow T_n$ äquivalente Origamis, wenn sie sich in der gleichen $\text{Deck}(T_n/T)$ -Bahn befinden. Wir haben also eine Bijektion*

$$\mathcal{C} / \text{Deck}(T_n/T) \longleftrightarrow \mathcal{O} \quad [p] \mapsto [p_n \circ p].$$

Beweis: Die Rückrichtung haben wir in Bemerkung II.2.7 gezeigt. Für die Hinrichtung seien

$$p : X \rightarrow T_n \quad \text{und} \quad p' : X' \rightarrow T_n$$

zwei \mathcal{C} -Überlagerungen, deren induzierte Origamis äquivalent sind. Wir erhalten also einen Isomorphismus $f : X \rightarrow X'$. Wir suchen ein $t \in \text{Deck}(T_n/T)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ T_n & \xrightarrow{t} & T_n \\ & \searrow & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

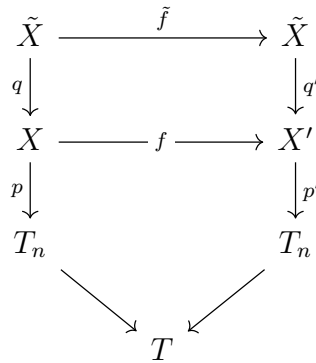
Wähle eine universelle Überlagerung \tilde{X} von T_n (sie existiert, da T_n wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend ist). Da die Überlagerung $T_n \rightarrow T$ endlich ist, ist $\tilde{X} \rightarrow T$ ebenfalls eine Überlagerung und damit ebenfalls universell (die Universalität hängt allein von der Fläche \tilde{X} ab). Durch die Universalität erhalten wir $q : \tilde{X} \rightarrow X$ sowie $q' : \tilde{X} \rightarrow X'$. Somit haben wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \tilde{X} \\ q \downarrow & & \downarrow q' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ T_n & & T_n \\ & \searrow & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

Nun sind

$$q' : \tilde{X} \rightarrow X' \quad \text{sowie} \quad f \circ q : \tilde{X} \rightarrow X'$$

Universelle Überlagerungen von X' . Nach der Eindeutigkeit der universellen Überlagerung (siehe Satz I.1.11) erhalten wir einen Automorphismus $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ wie folgt:



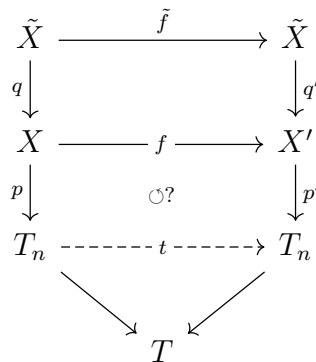
Da \tilde{f} zudem zur Identität auf T absteigt, ist es eine Decktransformation.

Wir nutzen nun die Tatsache, dass $T_n \rightarrow T$ normal ist und betrachten die mit dem Isomorphismus

$$\text{Deck}(\tilde{X}/T) / \text{Deck}(\tilde{X}/T_n) \cong \text{Deck}(T_n/T)$$

assoziierte natürliche Projektionsabbildung $\pi : \text{Deck}(\tilde{X}/T) \rightarrow \text{Deck}(T_n/T)$.
 Setze nun $t := \pi(\tilde{f})$.

In dem folgenden Diagramm kommutiert das an t angrenzende Dreieck automatisch (da t eine Decktransformation ist); wir müssen nur noch die Kommutativität des angrenzenden Quadrates prüfen:



Was aber bereits kommutiert ist das große Rechteck (nach obiger Isomorphie) sowie das obere Quadrat (nach Definition von \tilde{f}):

$$t \circ p \circ q = p' \circ q' \circ \tilde{f} \quad \text{und} \quad f \circ q = q' \circ \tilde{f}.$$

Für ein $x \in X$ wählen wir uns also ein Urbild $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und erhalten

$$t(p(x)) = t(p(q(\tilde{x}))) = p'(q'(\tilde{f}(\tilde{x}))) = p'(f(q(\tilde{x}))) = p'(f(x)).$$

Somit kommutiert das Diagramm und wir haben unser t gefunden. □

3. Klassifikation von \mathcal{O}

Wir möchten uns nun der zweiten Frage widmen. Da wir bereits \mathcal{C} mit Tupeln aus \mathcal{T}_{\sim} in Bijektion gesetzt haben und zudem \mathcal{O} als Quotientenobjekt von \mathcal{C} dargestellt haben, liegt es nahe, eine zusätzliche Äquivalenzrelation auf \mathcal{T}_{\sim} einzuführen, sodass \mathcal{O} mit dem Quotientenobjekt in Bijektion gesetzt werden kann.

Für die nachfolgende Konstruktion stellt sich Bemerkung I.2.4 als nützliches Werkzeug heraus. In unserem Fall werden wir es benutzen, um stetigen Abbildungen $f : T_n \rightarrow T_n$ Matrizen zuordnen zu können.

Konstruktion II.3.1 (Wirkung einer Abbildung auf der Homologie): Sei $f : T_n \rightarrow T_n$ stetig und $x_0 \in T_n$. Seien zudem B, C Basen von $\pi_1(T_n)$. Dann induziert f einen Gruppenhomomorphismus $D_{BC}(f)$ nach dem folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Top}_* & & T_n \xrightarrow{f} T_n \\
 \downarrow \pi_1 & & \\
 \text{Grp} & & \pi_1(T_n, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(T_n, f(x_0)) \cong \pi_1(T_n, x_0) \\
 \downarrow \text{ab} & & \\
 \text{Ab-Grp} & & \begin{array}{ccc}
 H_1(T_n) & \xrightarrow{\text{ab}(f_*)} & H_1(T_n) \\
 \text{via } B \downarrow & & \downarrow \text{via } C \\
 \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{D_{CB}(f)} & \mathbb{Z}^N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^N & \xrightarrow{D_{CB}(f)} & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^N
 \end{array}
 \end{array}$$

Hierbei wenden wir zunächst den Funktor aus Bemerkung I.2.4 an und erhalten f_* . Im zweiten Schritt wenden wir den Abelsierungsfunktor „ab“ an. Zu beachten ist, dass die Isomorphie $\pi_1(T_n, f(x_0)) \cong \pi_1(T_n, x_0)$ nicht kanonisch ist. Verschiedene Isomorphismen führen hier jedoch lediglich zu einem inneren Automorphismus auf $\pi_1(T_n, x_0)$, was nach unserem nächsten Schritt, dem Anwenden des Abelsierungsfunktors, keine Rolle spielt. Anschließend können wir die Homologie $H_1(T_n)$ via B und C als \mathbb{Z}^N darstellen. Wir haben somit einen Gruppenhomomorphismus, welchen wir $D_{CB}(f)$ nennen. Dies ist ein Morphismus von \mathbb{Z} -Moduln und kann somit als Matrix aus $\mathbb{Z}^{N \times N}$ betrachtet werden.

Im letzten Schritt können wir noch modulo $d \in \mathbb{N}^+$ reduzieren und die Matrix $D_{CB}(f)$ als Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ betrachten. Wir werden ab jetzt je nach Kontext $D_{CB}(f)$ für die ursprüngliche oder für die reduzierte Matrix schreiben.

Falls f ein Homöomorphismus ist, so ist nach Anwendung der beiden Funktoren $\text{ab}(f_*)$ ein Isomorphismus. Wiederum als \mathbb{Z} -wertige Matrix betrachtet hat sie Determinante ± 1 . Bei Reduktion modulo d bleibt die Determinante ± 1 und somit ist dann auch $D_{CB}(f)$ invertierbar.

Es ist wichtig, zu beachten, dass die resultierende Matrix von der Wahl der Basen abhängt. Direkt aus der Konstruktion folgt, dass für $B = \mathcal{S}$, $C = \mathcal{B}$ und $f = \text{id}_{T_n}$ die Matrix $D_{CB}(f) = D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}(\text{id}_{T_n})$ mit unserer in Abschnitt 3 berechneten Basiswechselmatrix $D_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$ übereinstimmt.

Außerdem ist es wichtig anzumerken, dass die Konstruktion funktoriell ist: Für zwei stetige Abbildungen $f, g : T_n \rightarrow T_n$ und Basen A, B, C von $\pi_1(T_n)$ erhalten wir

$$D_{CA}(g \circ f) = D_{CB}(g) \cdot D_{BA}(f).$$

Definition II.3.2: Nach Konstruktion II.3.1 induziert $\text{Deck}(T_n/T) = \langle t_x, t_y \rangle$ die Matrixgruppe \widehat{D} durch

$$\widehat{t}_x := D_{\mathcal{S}\mathcal{S}}(t_x), \quad \widehat{t}_y := D_{\mathcal{S}\mathcal{S}}(t_y), \quad \widehat{D} := \langle \widehat{t}_x, \widehat{t}_y \rangle.$$

Wir stellen also die Verschiebung um ein Kästchen nach rechts bzw. oben als Matrizen dar. Hierbei wählen wir die Schleifen-Basis, da mit ihr die Matrizen einfacher zu berechnen sind (siehe unten).

Die Gruppe \widehat{D} operiert auf $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N$ durch Multiplikation der *inversen* Matrix *von rechts* an den Vektor als Zeilenvektor. Diese Operation schränkt sich ein zu einer Operation \mathcal{T} , denn, da die Matrizen invertierbar sind, werden erzeugende Tupel auf erzeugende Tupel geschickt. Weiterhin ist die Operation verträglich mit \sim und steigt somit ab zu einer Operation auf \mathcal{T}_\sim :

$$\widehat{D} \times \mathcal{T}_\sim \rightarrow \mathcal{T}_\sim \quad (t, [v]_\sim) \mapsto [v \cdot t^{-1}]_\sim$$

Der nächste Satz zeigt, dass diese Operation auf \mathcal{T}_\sim und die in Definition II.2.6 definierte Operation auf \mathcal{C} zusammenpassen.

Satz II.3.3: Sei $f \in \text{Homeo}(T_n)$, B eine Basis von $\pi_1(T_n)$ und $D_{BB}(f)$ die nach Konstruktion II.3.1 induzierte Matrix. Wir haben das folgende kommu-

tative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xleftarrow{D_B} & \mathcal{T}_{\sim} \\
 \downarrow f & & \downarrow [v]_{\sim} \mapsto [v \cdot D_{BB}(f)^{-1}]_{\sim} \\
 \mathcal{C} & \xleftarrow{D_B} & \mathcal{T}_{\sim}
 \end{array}$$

Beweis: Sei $f \in \text{Homeo}(T_n)$ und $p \in \mathcal{C}$. Die Monodromieabbildungen m von p und m' von $f \circ p$ hängen wie folgt zusammen:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(T_n) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(T_n) \\
 \searrow m & & \swarrow m' \\
 & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} &
 \end{array}$$

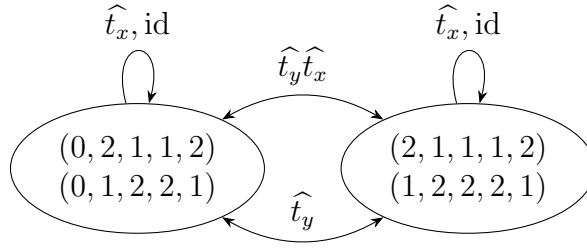
Die Basispunkte der Fundamentalgruppen spielen hier keine Rolle, da $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ abelsch ist. Aus demselben Grund steigen m (und m') ab zu Abbildungen $H_1(T_n) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Nach Wahl der Basis B steigen sie weiter ab zu Abbildungen $\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ und weiter zu einer Abbildung $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, welche nach Konstruktion von Satz I.4.2 genau unserem Vektor $D_B(p)$ bzw. $D_B(f \circ p)$ entspricht. Wir haben also das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(T_n) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(T_n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}^N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N & \xrightarrow{D_{BB}(f)} & (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \xleftarrow{D_B(f \circ p)} & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\
 \downarrow D_B(p) & & \downarrow \\
 & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} &
 \end{array}$$

Gleichzeitig steigt f_* entsprechend der Konstruktion II.3.1 zu der Matrix $D_{BB}(f)$ wie im obigen Diagramm ab. Die Kommutativität des unteren Dreiecks entspricht genau der Forderung $D_B(p) \cdot D_{BB}(f)^{-1} = D_B(f \circ p)$. \square

Korollar II.3.4: Wir haben die Bijektion

$$\mathcal{O} \xleftarrow{D_S} \mathcal{T}_{\sim} / \widehat{D}$$

Abbildung II.3.: Doppelbahn des Vektors $(0, 1, 2, 2, 1)$.

Beweis: Folgt direkt aus Satz I.4.2, Satz II.2.8 und Satz II.3.3. \square

Insgesamt haben wir also eine Doppelbahnstruktur auf \mathcal{T} : Die inneren Bahnen entsprechen Überlagerungen aus \mathcal{C} und die äußeren entsprechen Origamis aus \mathcal{O} . Eine solche Doppelbahn sieht man beispielsweise in Abbildung II.3: Die beiden inneren Bahnen entsprechen jeweils einer \mathcal{C} -Überlagerung. Die äußere Bahn bestehend aus allen 4 Vektoren entspricht dem Origami aus Abbildung II.2. Für $n = 2$ und $d = 3$ gibt es 21 äußere Bahnen der Länge 4, 15 der Länge 2 und 7 der Länge 1. Somit haben wir 242 erzeugende Tupel, 121 Überlagerungen in \mathcal{C}_n^d und 43 Origamis in \mathcal{O}_n^d .

4. Berechnung von \widehat{D}

In diesem Abschnitt widmen wir uns der folgenden Fragestellung:

Gegeben sei ein Origami durch einen Vektor $v \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N$ bezüglich der Basis \mathcal{S} . Finde *alle* Vektoren $w \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N$, die demselben (bzw. einem äquivalenten) Origami entsprechen.

Die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt lassen uns folgern, dass die gesuchte Menge von Vektoren die folgende Form¹ hat:

$$\{w \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N \mid \exists \widehat{t} \in \widehat{D}, \lambda \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times : w = \lambda v \cdot \widehat{t}\}.$$

Wir wissen bereits, dass \widehat{D} von \widehat{t}_x und \widehat{t}_y erzeugt wird, und, da t_x und t_y jeweils die Ordnung n haben und miteinander kommutieren, gilt das auch für \widehat{t}_x und \widehat{t}_y . Wir müssen also lediglich \widehat{t}_x und \widehat{t}_y bestimmen und können dann die gesuchte Menge berechnen als

$$\{w \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^N \mid \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, \lambda \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times : w = \lambda v \cdot \widehat{t}_x^i \widehat{t}_y^j\}.$$

¹Streng genommen ist die Relation $w = \lambda v \cdot \widehat{t}^{-1}$. Da wir dies aber sowieso für alle Elemente von \widehat{D} durchführen, brauchen wir nicht zu invertieren.

$$\widehat{t}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \widehat{t}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung II.4.: Die Matrizen \widehat{t}_x und \widehat{t}_y für $n = 2$ bezüglich der Basis \mathcal{S} .

Berechnung von \widehat{t}_x und \widehat{t}_y

Wir fokussieren uns auf die Berechnung von \widehat{t}_x bezüglich \mathcal{S} . Die Berechnung von \widehat{t}_y erfolgt vollkommen analog. Hierzu überlegen wir uns, was mit den Basiselementen aus \mathcal{S} nach Anwendung von t_x passiert:

- (i) Es ist klar, dass a ein Fixpunkt ist: $a \mapsto a$
- (ii) b wird auf den vertikalen Weg in der zweiten Spalte abgebildet. Dies ist in der Basis \mathcal{B} einfacher darstellbar; es entspricht dort dem Überqueren aller horizontalen Schlitze in der zweiten Spalte. Bei $n = 3$ wäre dies beispielsweise $s_2 s_8 s_{10}$ (vgl. Definition I.2.12). Allgemein gilt

$$b \mapsto s_2 \cdot s_{2n+2+0 \cdot (n-1)} \cdot s_{2n+2+1 \cdot (n-1)} \cdot \dots \cdot s_{2n+2+(n-2)(n-1)}.$$

Nachdem man den entsprechenden Vektor bezüglich der Basis \mathcal{B} berechnet hat, muss man noch den Basiswechsel $D_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$ anwenden.

- (iii) Die Schleifen werden jeweils um eins nach rechts verschoben:

$$l_{(x,y)} \mapsto l_{(x+1,y)}$$

Hierbei kann die Schleife l_{n^2} auftreten, die aber kein Erzeuger ist. Dies lässt sich jedoch auflösen, indem man ausnutzt, dass auf der Homologie die Relation

$$l_{n^2} = l_1^{-1} \cdot \dots \cdot l_{n^2-1}^{-1}$$

gilt (siehe Bemerkung I.2.14).

Hieraus kann man nun die Matrix \widehat{t}_x bestimmen. In der Abbildung II.4 sieht man beispielsweise die Matrizen \widehat{t}_x und \widehat{t}_y für $n = 2$. So ist beispielsweise die dritte Spalte von \widehat{t}_x der Vektor e_4 , da der dritte Basisvektor l_1 ist und $t_x(l_1) = l_2$ gilt.

Wir geben den kompletten Algorithmus zur Bestimmung von \widehat{t}_x und \widehat{t}_y an. Beide Matrizen werden durch die Funktion `TranslationMatrix` berechnet; der zweite Parameter gibt an, ob \widehat{t}_x oder \widehat{t}_y berechnet werden soll.

 Algorithmus 2: Bestimmung von \hat{t}_x und \hat{t}_y

```

1  # helper function that returns the vector
2  # corresponding to the given loop
3  vec_of_loop := function(n, loop)
4  local N, v;
5  if loop < 1 or loop > n*n then
6      Error("loop must be between 1 and n^2");
7  fi;
8  N := n*n+1;
9  if loop = n*n then
10     v := List([1..N], i->-1);
11     v[1] := 0;
12     v[2] := 0;
13     return v;
14 fi;
15 v := List([1..N], i->0);
16 v[loop+2] := 1;
17 return v;
18 end;
19
20 TranslationMatrix := function(n, is_right) # n > 1
21 local N, mat, i, j, in_axis, cross_axis, x, y, newx, newy;
22
23 if not n > 1 then
24     Error("n must be larger than 1");
25 fi;
26 N := n * n + 1;
27 if is_right then
28     in_axis := 1; cross_axis := 2;
29 else
30     in_axis := 2; cross_axis := 1;
31 fi;
32 mat := [];
33 # one loops ("a" or "b") stays fixed, the
34 # image of the other one has to be calculated
35 mat[in_axis] := List([1..N], i->0);
36 mat[in_axis][in_axis] := 1;
37 mat[cross_axis] := List([1..N], i->0);
38 mat[cross_axis][cross_axis] := 1;

```

```

39 if n = 2 then
40     # n = 2 is a special case, the only loop on
41     # the 2nd row/column is the 2nd/3rd one
42     if is_right then
43         mat[cross_axis][2 + 1] := -1;
44         mat[cross_axis][2 + 2] := 0;
45         mat[cross_axis][2 + 3] := -1;
46     else
47         mat[cross_axis] := [1,0,-1,-1,0];
48     fi;
49 else
50     for i in [0..n-1] do
51         if is_right then
52             j := 2 + (2 + i * n);
53         else
54             j := 2 + (1 + i + n);
55         fi;
56         mat[cross_axis][j] := 1;
57     od;
58 fi;
59 # loop through all loops and move them to the right/up
60 for y in [0..n-1] do
61     for x in [0..n-1] do
62         if x=n-1 and y=n-1 then continue; fi;
63         if is_right then
64             newx := (x+1) mod n;
65             newy := y;
66         else
67             newx := x;
68             newy := (y+1) mod n;
69         fi;
70         # convert (x,y) to 1-based number
71         mat[2 + n*y+x + 1] := vec_of_loop(n, n*newy+newx + 1);
72     od;
73 od;
74
75 return TransposedMat(mat);
76 end;

```

Kapitel III.

Veech-Gruppen von Origamis aus \mathcal{O}

1. Origamis als Translationsflächen

In diesem Abschnitt wollen wir Veech-Gruppen von Origamis aus \mathcal{O} untersuchen. Veech-Gruppen stellen eine wichtige Invariante dar und wurden von Veech in [Vee89] eingeführt. Bevor wir diese definieren können, müssen wir den Origamis jedoch mehr Struktur geben.

Wir erinnern uns daran, dass eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit aus einem topologischen Raum X besteht, sodass jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, welche homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist. Wir identifizieren ab jetzt $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ über die Standardbasis $(1, i)$. Die Homöomorphismen heißen *Karten*. Eine geeignete Menge dieser Homöomorphismen heißt *Atlas*. Wir betrachten im Folgenden eine besondere Art von Mannigfaltigkeiten.

Definition III.1.1: Sei X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $A = \{h_i : U_i \rightarrow h(U_i) \subseteq \mathbb{C}\}$. Sind alle Kartenwechselabbildungen

$$h_i \circ h_j^{-1} : h_j(U_i \cap U_j) \rightarrow h_i(U_i \cap U_j)$$

für $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ holomorph, so heißt das Tupel (X, A) *Riemannsche Fläche*. Sind alle Kartenwechselabbildungen sogar Translationen (Abbildungen der Form $x \mapsto x + y$ für $y \in \mathbb{C}$), dann heißt (X, A) *Translationsfläche*.

Wir haben bereits einige Translationsflächen gesehen: Beispielsweise können wir T mit der Struktur einer Translationsfläche versehen, indem wir $\{(x, y) \mid 0 \leq x, y < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ als Fundamentalbereich wählen. Wir schneiden den Torus in vier sich überlappende offene Quadrate (vergleiche Abbildung III.1), die wir jeweils auf den Fundamentalbereich abbilden. Zwei benachbarte Quadrate schneiden sich in zwei disjunkten offenen Mengen; zwei diagonal angrenzende Quadrate in vier disjunkten offenen Mengen. Auf jeder dieser Mengen sind

die Kartenwechsel Translationen. Wir können die Überdeckung durch die vier Quadrate also durch offene Mengen, auf denen die Kartenwechselabbildungen jeweils Translationen sind, verfeinern und erhalten so einen Translationsatlas.

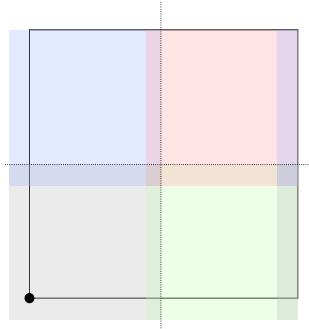


Abbildung III.1.: Die Überdeckung von T durch 4 offene, sich überlappende Quadrate (farblich gekennzeichnet), die homöomorph zu Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind.

Sei nun $o : X \rightarrow T$ ein Origami. Wir können die Translationsstruktur von T auf X liften. Sei hierzu $x \in X$. Nun hat $o(x) \in T$ eine Umgebung U , die vermöge einer Karte h homöomorph zu einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ist. Wir können U klein genug wählen, sodass es ganz in der Überlagerungsumgebung von $o(x)$ enthalten ist. Nun ist

$$h \circ o : o^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow V$$

ein Homöomorphismus. Alle Kartenwechsel sind Translationen, da dies bei T bereits der Fall war. Somit können wir von Origamis als Translationsflächen sprechen. Insbesondere sind $p_n : T_n \rightarrow T$ sowie alle Origamis aus \mathcal{O} Translationsflächen.

Besonders macht Translationsflächen die Tatsache, dass man auf ihnen *affine Diffeomorphismen* sinnvoll definieren kann.

Definition III.1.2 (Affiner Diffeomorphismus): Sei X eine Translationsfläche. Ein *affiner Diffeomorphismus* auf X ist eine Abbildung $f : X \rightarrow X$, welche lokal affin ist, d.h. sie ist lokal gegeben durch eine Matrix $A \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$. Wenn also h, j Karten sind von x bzw. $f(x)$, so gilt

$$j(f(x)) = A \cdot h(x) + b.$$

Die Gruppe der affinen Diffeomorphismen (mit Komposition) bezeichnen wir mit $\text{Aff}(X)$.

Bemerkung III.1.3: In dieser Definition ist A unabhängig von den gewählten Karten, denn andere Karten h', j' unterscheiden sich nur um Translationen c, d :

$$\begin{aligned} j'(f(x)) &= j(f(x)) + c = A \cdot h(x) + b + c = A \cdot (h'(x) - d) + b + c \\ &= A \cdot h'(x) + (-Ad + b + c). \end{aligned}$$

Hat die Abbildung f die Matrix A und g die Matrix B , so hat die Komposition $f \circ g$ die Matrix AB .

Diese Bemerkung rechtfertigt die folgende Definition:

Definition III.1.4: Sei X eine Translationsfläche. Wir definieren

- (i) die Untergruppe der affinen Diffeomorphismen, deren Matrix A positive Determinante hat, als $\text{Aff}^+(X)$.
- (ii) die *Derivationsabbildung* $D : \text{Aff}^+(X) \rightarrow \text{Gl}_2(\mathbb{R})$, die jedem affinen Diffeomorphismus seine Matrix A zuordnet. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus.
- (iii) die *Translationsgruppe* $\text{Trans}(X)$ sowie die *Veech-Gruppe* $\Gamma(X)$ durch

$$\text{Trans}(X) := \text{Kern}(D) \quad \Gamma(X) := \text{Bild}(D).$$

- (iv) die Veech-Gruppe eines Origamis $o : X \rightarrow T$ durch $\Gamma(o) := \Gamma(X)$.

Falls X einen endlichen Flächeninhalt hat, verändert ein affiner Diffeomorphismus $f \in \text{Aff}^+(X)$ den Flächeninhalt nicht. Der Faktor, um den sich der Flächeninhalt nach Anwendung von f verändert, ist aber gerade $|\det(D(f))|$. Da der Flächeninhalt einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit nicht 0 sein kann und wir zudem nur Diffeomorphismen mit positiver Determinante betrachten, muss also $\det(D(f)) = 1$ sein. Es folgt also, dass die Veech-Gruppe eine Untergruppe von $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$ ist.

Man kann sogar noch mehr sagen: Veech-Gruppen von Origamis sind Untergruppen von $\text{Sl}_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index ([Sch04, Bemerkung zu Proposition 6]).

Beispiel III.1.5: Wir betrachten T_n mit der von T über p_n gelifteten Translationsstruktur.

- Für $B \in \text{Sl}_2(\mathbb{Z})$ können wir affine Abbildungen auf \mathbb{R}^2 der Form

$$a_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto Bx$$

betrachten. Für ein $y \in (n\mathbb{Z})^2$ gilt nun $B(x + y) = Bx + By$, und, da $B \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ ist, gilt $By \in (n\mathbb{Z})^2$. Folglich können wir eine solche Abbildung als affine Abbildung $a_B : T_n \rightarrow T_n$, welche den Nullpunkt fixiert und für die $D(a_B) = B$ gilt, betrachten. Es gilt also

$$\Gamma(T_n) = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}).$$

- Eine Translation $t \in \mathrm{Trans}(T_n)$ ist wegen der ausgenommenen Gitterpunkte auf ganzzahlige Koordinaten beschränkt. Weiterhin wird $\mathrm{Deck}(T_n/T)$ von Translationen t_x und t_y erzeugt. Somit gilt bereits

$$\mathrm{Trans}(T_n) = \mathrm{Deck}(T_n/T).$$

2. Die Aktion von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathcal{O}

Die *spezielle lineare Gruppe über \mathbb{Z}* ($\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$) besteht aus Matrizen mit Einträgen in \mathbb{Z} , deren Determinante 1 ist. Nach Beispiel III.1.5 können wir sie als Untergruppe von $\mathrm{Aff}(T_n) \subseteq \mathrm{Homeo}(T_n)$ betrachten. Sie operiert somit nach Definition II.2.6 auf \mathcal{C} durch Verkettung. Die folgende Proposition stellt sicher, dass wir sie auch als Operation auf \mathcal{O} betrachten können.

Proposition III.2.1: *Die Operation*

$$\bullet : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \quad (B, [p_n \circ p]) \mapsto [p_n \circ B \circ p]$$

ist eine wohldefinierte Gruppenoperation. Hierbei betrachten wir $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ als Untergruppe von $\mathrm{Aff}(T_n)$ nach Beispiel III.1.5.

Beweis: Wir müssen nur die Wohldefiniertheit zeigen. Seien $p_n \circ p : X \rightarrow T$ und $p_n \circ p' : X' \rightarrow T$ äquivalente Origamis. Nach Satz II.2.8 gibt es einen Homeomorphismus $f : X \rightarrow X'$ und ein $t \in \mathrm{Deck}(T_n/T)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ T_n & \xrightarrow{t} & T_n \\ & \searrow & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

Nach Beispiel III.1.5 ist t eine von einer Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad z \mapsto z + c$$

für ein $c \in \mathbb{Z}^2$ induzierte Translation. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad z \mapsto z + Bc$$

steigt ab zu einer wohldefinierten Translation $t' : T_n \rightarrow T_n$. Das folgende Diagramm kommutiert nun:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ T_n & \xrightarrow{t} & T_n \\ a_B \downarrow & & \downarrow a_B \\ T_n & \xrightarrow{t'} & T_n \end{array}$$

Da t' eine Translation ist, liegen $a_B \circ p$ und $a_B \circ p'$ in derselben $\mathrm{Deck}(T_n/T) = \mathrm{Trans}(T_n)$ -Bahn und induzieren somit nach Satz II.2.8 äquivalente Origamis. \square

Die Operation ist interessant, weil wir mit ihr Veech-Gruppen berechnen können.

Satz III.2.2: Sei $o \in \mathcal{O}$. Wir betrachten die in Proposition III.2.1 definierte Operation von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ auf \mathcal{O} . Es gilt

$$\Gamma(o) = \mathrm{Stab}(o).$$

Beweis: Sei $p \in \mathcal{C}$ die Überlagerung, von der o induziert ist. Sei $B \in \mathrm{Stab}(o)$ und a_B der zu B gehörende affiner Diffeomorphismus. Dann gibt es ein $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ und ein $t \in \mathrm{Deck}(T_n/T)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ T_n & \xrightarrow{t \circ a_B} & T_n \end{array}$$

Nach Beispiel III.1.5 ist t eine von einer Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad z \rightarrow z + c$ für ein $c \in \mathbb{Z}^2$ induzierte Translation.

Wir behaupten, dass f ein affiner Diffeomorphismus mit $D(f) = B$ ist. Sei dazu $x \in X$. Wir wählen eine Umgebung U von x klein genug, dass $p|_U$ ein Homöomorphismus auf das Bild ist und wir eine Karte h_1 auf U haben. Wir wählen weiterhin eine Karte h_2 von $f(x)$. Nach Definition der

Translationsstruktur auf X gibt es Karten j_1 und j_2 von $p(x)$ bzw. $p(f(x))$, deren Liftungen h_1 und h_2 sind. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \forall z \in h_1(U) : (h_2 \circ f \circ h_1^{-1})(z) &= (j_2 \circ p \circ f \circ p_U^{-1} \circ j_1^{-1})(z) \\ &= (j_2 \circ t \circ a_B \circ j_1^{-1})(z) = Bz + c \end{aligned}$$

Somit hat f lokal die Form $z \mapsto Bz + c$ und damit ist $B \in \Gamma(o) = \Gamma(X)$.

Sei nun umgekehrt $B \in \Gamma(o)$ (und somit $B^{-1} \in \Gamma(o)$). Dann gibt es einen affinen Diffeomorphismus $h : X \rightarrow X$ mit $D(h) = B^{-1}$. Wir nutzen nun aus, dass ein solcher affiner Diffeomorphismus zu einem affinen Diffeomorphismus $\bar{h} \in \text{Aff}^+(T)$ mit $D(\bar{h}) = D(h) = B^{-1}$ absteigt (siehe [Sch04, Proposition 6 (3)]). Nach demselben Argument steigt $a_B \in \text{Aff}^+(T_n)$ ab zu einer Abbildung $\bar{a}_B \in \text{Aff}^+(T)$ mit $D(\bar{a}_B) = D(a_B) = B$. Wir haben also das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{h} & X & & \\ \downarrow p & & \downarrow p & & \\ T_n & & T_n & \xrightarrow{a_B} & T_n \\ p_n \downarrow & & \downarrow p_n & & \downarrow p_n \\ T & \xrightarrow{\bar{h}} & T & \xrightarrow{\bar{a}_B} & T \end{array}$$

Es gilt $D(\bar{a}_B \circ \bar{h}) = D(\bar{a}_B) \cdot D(\bar{h}) = B \cdot B^{-1} = I$. Also ist $\bar{a}_B \circ \bar{h}$ eine Translation. Nach Beispiel III.1.5 ist aber $\text{Trans}(T) = \text{Deck}(T/T)$ trivial. Somit muss bereits $\bar{a}_B \circ \bar{h} = \text{id}_T$ gelten. Also ist h ein Isomorphismus zwischen o und $B \bullet o$. \square

Korollar III.2.3: Sei $o \in \mathcal{O}$ und $j \in \text{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt

$$\Gamma(j \bullet o) = j\Gamma(o)j^{-1}.$$

Beweis: Falls B eine Überlagerung $p \in \mathcal{C}$ stabilisiert, so stabilisiert jBj^{-1} die Überlagerung $a_j \circ p$.

3. Aktion von $\text{Sl}_2(\mathbb{Z})$ auf der Homologie von T_n

Wir möchten entscheiden können, ob eine gegebene Matrix $B \in \text{Sl}_2(\mathbb{Z})$ in der Veech-Gruppe eines Origami $o = p_n \circ p \in \mathcal{O}$ mit Vektordarstellung v (bzgl. \mathcal{S}) liegt. Dies ist nach Satz III.2.2 genau dann der Fall, wenn sie das Origami

3. Aktion von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ auf der Homologie von T_n

stabilisiert. Nach Satz II.3.3 und Korollar II.3.4 ergibt sich hieraus folgendes Kriterium:

$$B \in \Gamma(o) \iff \exists t \in \widehat{D}, \lambda \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times : v \cdot D_{SS}(B)t = \lambda v$$

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, zu einer gegebenen Matrix $M \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ die induzierte Matrix $D_{SS}(M) \in \mathbb{Z}^{N \times N}$ zu bestimmen. Dazu merken wir zunächst an, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ von zwei Matrizen erzeugt wird:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch gesehen handelt es sich bei S um eine Drehung um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn und bei T um eine Scherung um eine Einheit nach rechts.

Wir können zunächst die Matrizen

$$\widehat{S} := D_{SS}(S) \in \mathbb{Z}^{N \times N}, \quad \widehat{T} := D_{SS}(T) \in \mathbb{Z}^{N \times N}$$

explizit berechnen. Obwohl die Matrizen bezüglich der Schleifen-Basis berechnet werden, werden sich beide Basen als nützlich erweisen. Wir stellen uns hierbei wieder die Frage, was mit einem gegebenen Basiselement von $\pi_1(T_n)$ nach Anwendung von S_* bzw. T_* passiert.

Im zweiten Schritt können wir die induzierte Matrix zu einer beliebigen Matrix $M \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ bestimmen, indem wir M zerlegen in ein Wort in S und T , und dann das entsprechende Wort in \widehat{S} und \widehat{T} aufschreiben. Dies funktioniert, da die Konstruktion II.3.1 ein Funktor ist.

Konstruktion von \widehat{S}

Dies ist eine Drehung um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn (vgl. Abbildung III.2). Schleifen werden also auf andere Schleifen abgebildet. Genauer: Die Schleife auf dem Punkt (x, y) wird auf die Schleife bei $(-y, x) \bmod n$ abgebildet. Falls l_{n^2} auftritt, verfahren wir wie bei der Berechnung von \widehat{t}_x und nutzen die Relation

$$l_{n^2} = l_1^{-1} \cdot \dots \cdot l_{n^2-1}^{-1}.$$

Durch die Drehung wird b auf $-a$ abgebildet. Weiterhin wird a auf den vertikalen Weg in der rechten Spalte abgebildet. Dieser entspricht genau dem Weg s_n aus dem Erzeugendensystem \mathcal{B} (vgl. Definition I.2.12). Wir müssen

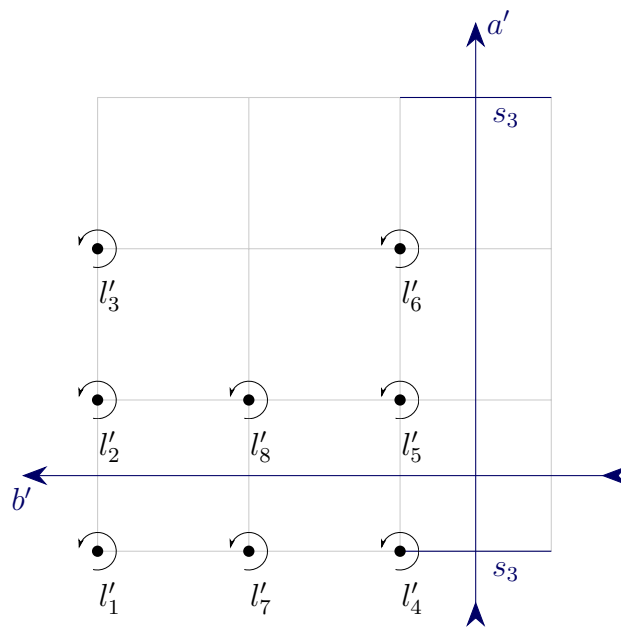


Abbildung III.2.: Das Bild von \mathcal{S} unter S_* .

also s_n mit den Erzeugern aus \mathcal{S} darstellen. Da s_n in der Homologie dem n -ten Einheitsvektor e_n entspricht, reicht es also, $D_{\mathcal{S}\mathcal{B}} \cdot e_n$ zu berechnen¹

Ein Beispiel für die Konstruktion von \widehat{S} für $n = 2$ sieht man in Abbildung III.3.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung III.3.: Die Matrix \widehat{S} für $n = 2$

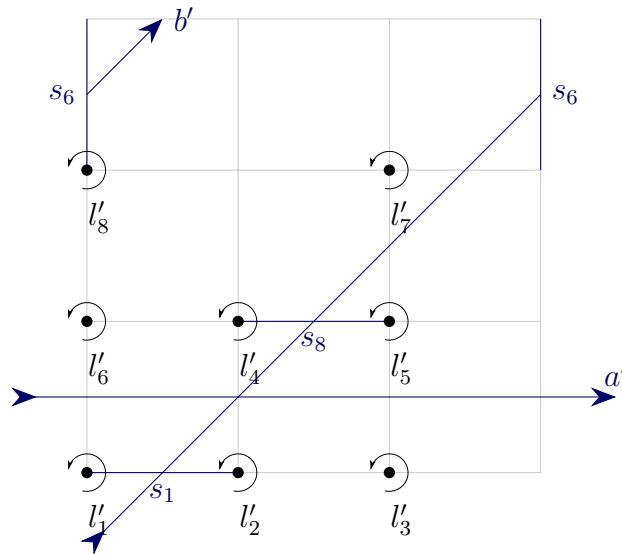


Abbildung III.4.: Das Bild von \mathcal{S} unter T_* . Das Bild von b überquert die Schlitze s_1, s_8 und s_6 .

Konstruktion von \widehat{T}

Dies ist eine Scherung um eine Einheit nach rechts (vgl. Abbildung III.4). Folglich werden Schleifen wieder auf Schleifen abgebildet. Schleifen in der ersten Reihe (mit y Koordinate 0) sind also Fixpunkte. Schleifen in der zweiten Reihe (mit y Koordinate 1) werden um eine Einheit nach rechts verschoben, die in der dritten Reihe um zwei Einheiten usw. Konkret wird eine Schleife bei (x, y) auf die Schleife bei $(x + y, y) \bmod n$ abgebildet. Wie oben müssen wir bei l_{n^2} aufpassen und die Relation verwenden.

Der horizontale Weg a ist ein Fixpunkt. Für das Bild des vertikalen Weges b eignet sich wieder das „Schlitze“-Erzeugendensystem besser: Der Weg wird auf die Diagonale abgebildet, welche in dem Erzeugendensystem leicht durch Überqueren entsprechender Schlitze dargestellt werden kann. Nachdem wir den Vektor bezüglich dieses Erzeugendensystems bestimmt haben, können wir wie zuvor die berechnete Basiswechsellmatrix verwenden, um den Vektor bezüglich des „Schleifen“-Erzeugendensystems darzustellen.

Ein Beispiel für die Konstruktion von \widehat{T} für $n = 2$ sieht man in Abbildung III.5.

¹Alternativ könnte man auch $S(a) = s_n = t_x^{-1}(b)$ darstellen und den Vektor als $\widehat{t}_x^{-1} \cdot e_2$ berechnen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Abbildung III.5.: Die Matrix \widehat{T} für $n = 2$. Man sieht, dass l_3 auf $l_4 = l_1^{-1}l_2^{-1}l_3^{-1}$ abgebildet wird.

Algorithmus zur Bestimmung von $\langle \widehat{S}, \widehat{T} \rangle$

Aus diesen beiden Konstruktionen kann man nun einen Algorithmus ableiten, welcher für ein gegebenes n die Matrizen \widehat{S} sowie \widehat{T} bestimmt. Diese kann man dann benutzen, um eine beliebige Matrix $M \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ in die Erzeuger zu zerlegen und anschließend so $D_{SS}(M)$ zu berechnen. Die Zerlegung von M in ein Wort in den Erzeugern S, T ist in der Funktion `STDecompositionAsList` in dem Paket `[ModularGroup]` implementiert. Der Algorithmus verwendet die Hilfsfunktion `vec_of_loop` aus Algorithmus 2.

Algorithmus 3: Bestimmung von \widehat{S} und \widehat{T}

```

1 ActionOfTOnHomologyOfTn := function(n)
2   local mat, N, i, j, k, l, img_of_b_wrong_base;
3   N := n * n + 1;
4   mat := [];
5   # the horizontal path is a fixpoint: T(a) = a
6   mat[1] := List([1..N], i->0);
7   mat[1][1] := 1;
8
9   # the vertical path is done via the other base
10  img_of_b_wrong_base := List([1..N], i->0);
11  img_of_b_wrong_base[1] := 1;
12  img_of_b_wrong_base[2*n] := 1;
13  for i in [2..n-1] do
14    img_of_b_wrong_base[n*i+2] := 1;
15  od;
16  mat[2] := Inverse(BaseChangeSToB(n)) * img_of_b_wrong_base;
17
18  for k in [1..n*n-1] do

```


3. Aktion von $Sl_2(\mathbb{Z})$ auf der Homologie von T_n

```

19     # loop l_k
20     # calculate (0-based) (x,y)-coordinates of the loop
21     i := QuoInt(k-1, n);
22     j := ((k-1) mod n);
23     l := n * i + ((i + j) mod n) + 1;
24     mat[2+k] := vec_of_loop(n, l);
25     od;
26
27     return TransposedMat(mat);
28 end;
29
30 unit_vector := function(n, i)
31     local v;
32     v := List([1..n], x->0);
33     v[i] := 1;
34     return v;
35 end;
36
37 apply_S_to_loop := function(n, k)
38     local x,y,x2, y2;
39     y := QuoInt(k-1, n);
40     x := ((k-1) mod n);
41     # now rotate and wrap
42     y2 := x mod n;
43     x2 := -y mod n;
44     return n * y2 + x2 + 1;
45 end;
46
47 ActionOfSOnHomologyOfTn := function(n)
48     local mat, N, i, j, v, k, l;
49     N := n * n + 1;
50     mat := [];
51     mat[1] := Inverse(BaseChangeSToB(n)) * unit_vector(N, n);
52     mat[2] := -unit_vector(N,1);
53
54     for k in [1..n*n-1] do
55         mat[2+k] := vec_of_loop(n, apply_S_to_loop(n, k));
56     od;
57
58     return TransposedMat(mat);

```

```

59 end;
60
61 ActionOfMatrixOnHomologyOfTn := function(n, A)
62     local itm, S, T, mat;
63     S := ActionOfSOnHomologyOfTn(n);
64     T := ActionOfTOnHomologyOfTn(n);
65     mat := IdentityMat(n*n+1);
66     for itm in STDecompositionAsList(A) do
67         if itm[1] = "S" then
68             mat := mat * (S^itm[2]);
69         else
70             mat := mat * (T^itm[2]);
71         fi;
72     od;
73     return mat;
74 end;

```

4. Origamis mit gegebenen Veech-Gruppen

Die Frage, welche Untergruppen von $SL_2(\mathbb{Z})$ als Veech-Gruppen von Origamis auftreten, ist noch offen. Resultate gibt es bisher nur für spezielle Untergruppen ([Sch05], [EM12]). Für *Kongruenzuntergruppen* von $SL_2(\mathbb{Z})$ lässt sich ein besonders schönes Ergebnis feststellen.

Definition III.4.1: Sei

$$\pi_k : SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \quad (a)_{i,j} \mapsto ([a])_{i,j},$$

die Abbildung, die alle Einträge einer Matrix modulo k reduziert. Gruppen der Form $\pi_k^{-1}(J)$ für $k \in \mathbb{N}^+$ und einer Untergruppe $J \subseteq SL_2(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ heißen *Kongruenzuntergruppen*.

Für eine Kongruenzuntergruppe H heißt das minimale k mit dieser Eigenschaft das *Level* von H . Wir schreiben $L(H)$ für das Level von H .

Der folgende Satz sagt, dass viele solche Untergruppen als Veech-Gruppen von Origamis auftreten.

Satz III.4.2: *Alle Kongruenzuntergruppen $H \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ mit*

- (i) $L(H)$ prim und $L(H) \notin \{2, 3, 5, 7, 11\}$ oder
- (ii) $L(H) \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$ und H hat in $SL_2(\mathbb{Z})$ Index ungleich $L(H)$

treten als Veech-Gruppen von Origamis auf.

Beweis: Siehe [Sch05, Theorem 4]. □

Die einzigen Kongruenzuntergruppen, welche von diesem Satz *nicht* abgedeckt sind, sind die, deren Level mit ihrem Index übereinstimmt und in $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ liegt.

Haben wir für eine Kongruenzuntergruppe H von Level p ein Origami o gefunden, dessen Veech-Gruppe H ist, so tritt nach Korollar III.2.3 auch jede zu H konjugierte Untergruppe als Veech-Gruppe auf. Somit reicht es, aus jeder Konjugationsklasse von Kongruenzuntergruppen mit Level und Index gleich p eine Kongruenzuntergruppe als Veech-Gruppe zu realisieren.

In diesem Abschnitt wollen wir die bisherigen Ergebnisse nutzen, um in \mathcal{O} explizit nach Beispielen für Origamis zu suchen, deren Veech-Gruppe eine solche „Ausnahmegruppe“ ist. Wir verwenden dabei die in Kapitel II eingeführte Beschreibung von Origamis als erzeugende Vektoren bis auf eine bestimmte Äquivalenzrelation sowie die in Abschnitt 3 berechneten Matrizen, welche die Wirkung auf der Homologie beschreiben.

Der im Folgenden beschriebene Algorithmus erhält als Eingabe eine Primzahl² d , n sowie $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Er sucht in \mathcal{O}_n^d nach einem Origami, dessen Veech-Gruppe eine Kongruenzuntergruppe mit Level und Index p ist.

Schritt 1

Zunächst verwenden wir die Funktion `ConjugacyClassesSubgroups`, um in den Konjugationsklassen von Untergruppen von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ diejenigen mit Index p zu finden. Die Existenz wird durch [Sch05, Proposition 6.33.] sichergestellt. Wir wählen einen Vertreter der Konjugationsklasse und betrachten das Urbild $H_p \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Dies ist unsere Kongruenzuntergruppe, welche wir als Veech-Gruppe realisieren wollen. Als Untergruppe von endlichem Index einer endlich erzeugten Untergruppe ist diese Gruppe endlich erzeugt (siehe [LS15, Seite 103, Proposition 4.2]).

²wir beschränken uns auf Primzahlen d , da GAP's `Eigenspaces`-Funktion auf Körpern arbeitet.

 Algorithmus 4: Suche nach Kongruenzuntergruppen von Index und Level p

```

1 SubgroupToModularGroup := function(p, G, U)
2     local perms;
3     perms := List(CosetTable(G, U), PermList);
4     # perms[1] describes the coset permutation for S,
      ↪ perms[3] for T
5     return ModularSubgroup(perms[1], perms[3]);
6 end;
7 FindModularSubgroupIndexP := function(p)
8     local S, T, G, subgroups;
9     S := [ [ 0, -1 ], [ 1, 0 ] ];
10    T := [ [ 1, 1 ], [ 0, 1 ] ];
11    G := Image(IsomorphismFpGroupByGenerators(SL(2, p), [S *
      ↪ One(GF(p)), T * One(GF(p))]));
12
13    # Search for index p subgroup
14    subgroups:=List(ConjugacyClassesSubgroups(G),
      ↪ x->Representative(x));
15    subgroups := Filtered(subgroups, x->Index(G, x) = p);
16
17    return List(subgroups, U->SubgroupToModularGroup(p, G,
      ↪ U));
18 end;
    
```

Für $p \in \{2, 3, 5\}$ ergibt sich jeweils eine Konjugationsklasse und für $p \in \{7, 11\}$ jeweils zwei. Wir geben hier die Erzeuger der Untergruppen H_p konkret an:

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \langle S^{-2}, TS^{-1}, (ST)^{-1} \rangle \\
 H_3 &= \langle S, TST^{-1}, T^3, T^{-1}ST \rangle \\
 H_5 &= \langle S, T^2(TS)^{-1}, T^{-2}S^{-1}T \rangle \\
 H_7 &= \langle S, T^{-1}ST, T^3S^{-1}T^{-2}, TST^{-1}STS^{-1}T^{-1} \rangle \\
 H'_7 &= \langle S, TST^{-1}, T^{-1}ST^{-2}, T^{-3}S^{-1}T^2, T^3ST^{-3} \rangle \\
 H_{11} &= \langle S^{-2}, TST^{-1}, ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}, (ST^{-1})^2T^{-1}, ST^{-4}, \\
 &\quad T^{-2}ST^2, T^{-4}S^{-1}T, T^{-1}STST^{-1}S^{-1}T \rangle \\
 H'_{11} &= \langle S^{-2}, T^{-1}S^{-1}, T^3S^{-1}T^{-2}, ST^{-2}ST^2S^{-1}, ST^{-4}S^{-1}TS^{-1}, \\
 &\quad TST^{-1}STS^{-1}T^{-1}, ST^{-1}STST^{-1}S^{-1}TS^{-1} \rangle
 \end{aligned}$$

Schritt 2

Wir berechnen die Aktion von H_p auf der Homologie nach Konstruktion II.3.1:

$$\widehat{H}_p := \{D_{SS}(g) \mid g \in H_p\}$$

Hierfür wenden wir den in Abschnitt 3 hergeleiteten Algorithmus auf alle Erzeuger an:

$$\widehat{H}_p = \langle D_{SS}(g_1), \dots, D_{SS}(g_k) \rangle, \quad \text{falls } H_p = \langle g_1, \dots, g_k \rangle.$$

Schritt 3

Sei $\widehat{H}_p = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$. Falls H_p ein Origami mit Vektor v stabilisiert, so gilt für alle Erzeuger g , dass $v \cdot g^{-1}$ das gleiche Origami darstellt. Wie zuvor können wir auf das Invertieren verzichten, da wir das sowieso für alle Erzeuger von \widehat{H}_p prüfen müssen. Nach Korollar II.3.4 ist das genau dann der Fall wenn

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \quad \exists t \in \widehat{D}, \lambda \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times : \quad v \cdot g_i = \lambda v \cdot t.$$

Hierbei ist \widehat{D} wie in Definition II.3.2. Wir suchen also nach *simultanen Eigenvektoren modulo \widehat{D}* :

$$\Omega := \bigcap_{i=1}^k \bigcup_{\substack{t \in \widehat{D}, \\ \lambda \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}} \text{Eig}(g_i \cdot t, \lambda) = \bigcup_{(\lambda_i)_i, (t_i)_i} \bigcap_{i=1}^k \text{Eig}(g_i \cdot t_i, \lambda_i),$$

wobei $(\lambda_i)_i$ und $(t_i)_i$ alle möglichen k -Tupel von Elementen aus $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ bzw. \widehat{D} durchlaufen. Wir berechnen rekursiv für $j \in \{1, \dots, k\}$ die folgenden Mengen von Eigenraumschnitten:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{\text{Eig}(g_1 \cdot t, \lambda) \mid t \in \widehat{D}, \lambda \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times\} \\ \Omega_{j+1} &:= \{\text{Eig}(g_{j+1} \cdot t, \lambda) \cap E \mid t \in \widehat{D}, \lambda \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times, E \in \Omega_j\} \end{aligned}$$

Letztendlich haben wir $\Omega = \Omega_k$. Dies ist eine Menge von Vektorräumen, welche genau die gesuchten Vektoren enthalten.

Dieser Schritt ist der rechenintensivste in dem ganzen Algorithmus. Seine Laufzeit ist exponentiell $\mathcal{O}((n^2)^k)$ in der Größe n und der Anzahl der Erzeuger k .

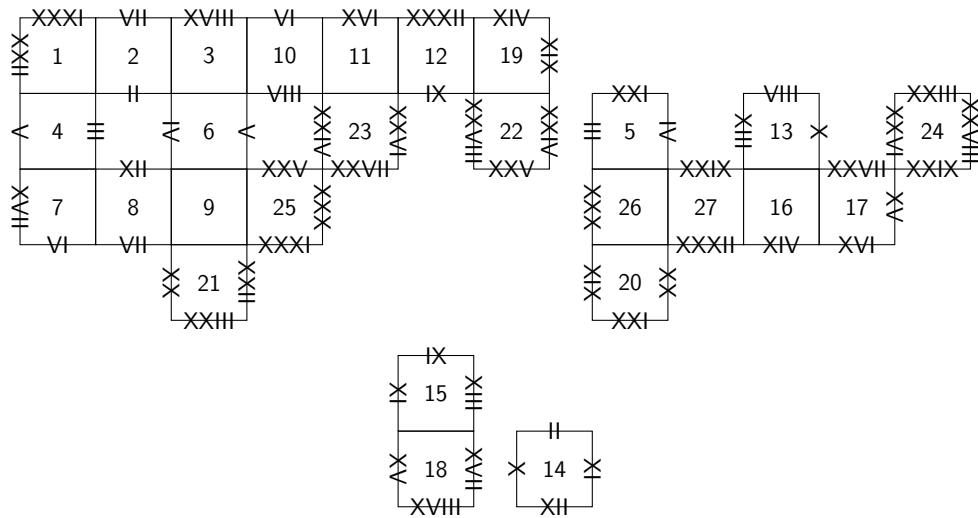


Abbildung III.6.: Ein Origami $n = d = 3$ und Veech-Gruppe H_3

Schritt 4

Wir gehen alle Vektoren v in Vektorräumen in Ω durch. Für einen solchen Vektor gilt, dass H_p das zugehörige Origami o stabilisiert. Das bedeutet, dass die Veech-Gruppe H_p enthält. Wenn die H_p eine *echte* Untergruppe der Veech-Gruppe ist, dann ist die Veech-Gruppe bereits ganz $Sl_2(\mathbb{Z})$, da H_p Primzahlindex hat.

Es reicht also zu prüfen, ob S und T das Origami ebenfalls stabilisieren. Das können wir einfach tun, indem wir \hat{S} bzw. \hat{T} an v multiplizieren und schauen, ob der resultierende Vektor äquivalent zu v ist. Ist das der Fall, so ist die Veech-Gruppe echt größer, als H_p , und wir müssten weitersuchen. Ist das nicht der Fall, dann ist die Veech-Gruppe H_p und wir können v ausgeben.

Der vollständige Quellcode ist im Anhang A beigelegt. Hierbei implementiert die Funktion `SearchForOrigamiWithVeechGroup` den oben beschriebenen Algorithmus. Sie nimmt als Parameter die Größe des Torus n (mit $n \geq 2$), eine Primzahl d und eine endlich erzeugte Untergruppe von $Sl_2(\mathbb{Z})$ H . Falls ein Origami o mit $\Gamma(o) = H$ gefunden wird, gibt sie eine Vektordarstellung von o bezüglich der Basis \mathcal{S} zurück, ansonsten `false`.

Ergebnisse

Für H_2 , H_3 , H_5 , H_7 und H'_7 konnten Origamis bestimmt werden, welche diese Gruppen als Veech-Gruppen haben. In Table III.1 sind die Ergebnisse

5. Eine unendliche Folge von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ -Origamis

	d=2	d=3	d=5	d=7
n=2				
n=3		H_3	H_3	
n=4		H_2	H_2	
n=5				H_5
n=6				
n=7		H_7, H'_7	H_7, H'_7	H_7
n=8	H_2	H_2	H_2	

Tabelle III.1.: Durch den Algorithmus gefundene Origamis, deren Veech-Gruppen Kongruenzuntergruppen sind. Ein Eintrag bedeutet hierbei, dass die angegebene Gruppe als Veech-Gruppe von einem Origami mit den entsprechenden Parametern n und d gefunden wurde. Die Origamis sind im Anhang B angegeben.

zusammengefasst. Die dazugehörigen Origamis sind in Anhang B aufgelistet. Wir machen die folgenden Beobachtungen:

- Die Ergebnisse lassen vermuten, dass solche Origamis nur für $n = p^k$ für $k \in \mathbb{N}^+$ auftreten können.
- Es konnten daneben für jedes Paar von n und d Origamis gefunden werden, die $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ als Veech-Gruppe haben. Dies legt die Vermutung nahe, dass solche Origamis für jedes n und jede Primzahl d in \mathcal{O}_n^d existieren.

5. Eine unendliche Folge von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ -Origamis

Im Folgenden wollen wir eine unendliche Folge von Origamis o angeben, für die gilt, dass $\Gamma(o) = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ ist. Hierzu berechnen wir die gemeinsamen (linken) Eigenvektoren zum Eigenwert 1 von \widehat{S} und \widehat{T} über \mathbb{Z} und $n = 2$:

$$\mathrm{Eig}(\widehat{S}, 1) \cap \mathrm{Eig}(\widehat{T}, 1) = \langle (1, -1, -3, 1, 1) \rangle$$

Der Vektor $v := (1, -1, -3, 1, 1)$ bleibt ein gemeinsamer Eigenvektor zum Eigenwert 1, wenn wir die Matrizen modulo d für ein beliebiges $d \in \mathbb{N}^+$ betrachten. Er bleibt außerdem erzeugend, da er den Eintrag 1 enthält. Somit erhalten wir für jedes d ein Origami o_d zu dem Vektor $v \bmod d$, welches von

Kapitel III. Veech-Gruppen von Origamis aus \mathcal{O}

S und T stabilisiert wird. Folglich gilt $\Gamma(o_d) = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Da die o_d paarweise verschieden sind (sie haben Grad $4d$), haben wir eine unendliche Folge von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ Origamis gefunden.

Kapitel IV.

Weitere Eigenschaften von Origamis aus \mathcal{O}

1. Bahnstruktur der Origamis

Wir haben in Kapitel II gesehen, dass wir auf \mathcal{T} eine Doppelbahnstruktur haben. Die inneren Bahnen der Aktion

$$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} \quad (a, v) \mapsto a \cdot v$$

sind hierbei relativ einfach aufgebaut: In Proposition I.4.6 haben wir gesehen, dass die inneren Bahnen alle Länge $\varphi((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times)$ haben. In diesem Abschnitt wollen wir uns daher den äußeren Bahnen, d.h. den Bahnen bezüglich der \widehat{D} -Aktion auf \mathcal{T}_\sim (siehe Definition II.2.6), widmen. Hierbei ist $\widehat{D} = \langle D_{SS}(t_x), D_{SS}(t_y) \rangle \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ die von $\text{Deck}(T_n/T)$ induzierte Matrizen-Gruppe (siehe Definition II.3.2). Wir erinnern uns, dass die Aktion folgendermaßen aussieht:

$$\widehat{D} \times \mathcal{T}_\sim \rightarrow \mathcal{T}_\sim \quad (t, v) \mapsto v \cdot t^{-1}$$

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit $[\cdot]_{\widehat{D}}$ die Äquivalenzklasse bezüglich dieser Aktion. Wir bezeichnen weiterhin mit r_k die Anzahl der Bahnen der Länge k :

$$r_k := \# \{A \in \mathcal{T}_\sim / \widehat{D} \mid \#A = k\}$$

Außerdem werden wir uns in dem Abschnitt auf Primzahlen d beschränken. Das hat den Vorteil, dass wir die Matrizen aus \widehat{D} als Matrizen über \mathbb{F}_d betrachten können. Mit Spec_d bzw. Eig_d bezeichnen wir jeweils das *Spektrum* bzw. den *linken Eigenraum* über \mathbb{F}_d .

Wir beginnen mit der Untersuchung der Anzahl der Bahnen von Länge 1.

Lemma IV.1.1: Sei $k \in \mathbb{N}^+$, $t \in \widehat{D}$ mit $t^k = I$ (hierbei ist I die Identitätsmatrix) und $\text{ggT}(d-1, k) = 1$. Dann gilt

$$\text{Spec}_d(t) = \{1\}.$$

Beweis: Wir betrachten die Wirkung von t_x und t_y auf den Basiselementen der Homologie von T_n . Der horizontale Weg a ist ein Fixpunkt von t_x und der vertikale Weg b wird von t_x auf b sowie einige Schleifen geschickt. Eine analoge Aussage gilt für t_y . Außerdem schicken t_x und t_y Schleifen auf andere Schleifen (siehe Algorithmus 2.). Daraus folgt, dass die Matrizen \widehat{t}_x und \widehat{t}_y den folgenden Aufbau haben:

$$\widehat{t}_x = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ * & * \end{pmatrix} \quad \widehat{t}_y = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ * & * \end{pmatrix}$$

Also sind e_1 und e_2 gemeinsame (linke) Eigenvektoren von \widehat{t}_x und \widehat{t}_y (und damit von ganz \widehat{D}) zum Eigenvektor 1.

Es bleibt zu zeigen, dass 1 der einzige Eigenwert ist. Sei also $vt = av$ für einen Zeilenvektor $v \neq 0$. Dann gilt

$$v = v \cdot I = v \cdot t^k = a^k \cdot v.$$

Wegen $v \neq 0$ und, da d prim ist, ist v erzeugend. Somit können wir nach demselben Argument wie in Proposition I.4.6, schließen, dass $a^k = 1$ ist. Die Ordnung von a in $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ ist damit ein gemeinsamer Teiler von k und $|(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times| = \varphi(d) = d-1$. Nach Voraussetzung sind $d-1$ und k teilerfremd; somit muss die Ordnung 1 sein. Damit ist $a = 1$. \square

Proposition IV.1.2: Sei $\text{ggT}(d-1, n) = 1$. Dann gilt

$$r_1 = \frac{d^x - 1}{d - 1} \quad \text{mit } x := \dim(\text{Eig}_d(\widehat{t}_x, 1) \cap \text{Eig}_d(\widehat{t}_y, 1)).$$

Beweis: Wir wollen die folgende Bijektion zeigen:

$$\begin{aligned} & \{[[v]_\sim]_{\widehat{D}} \mid \#[[v]_\sim]_{\widehat{D}} = 1\} \\ & \leftrightarrow \{\text{Eindimensionale Untervektorräume von } \text{Eig}_d(\widehat{t}_x, 1) \cap \text{Eig}_d(\widehat{t}_y, 1)\}. \end{aligned}$$

Eindimensionale Untervektorräume sind genau die inneren Bahnen (bis auf den Nullvektor). Wir müssen also für ein gegebenes $[[v]_\sim]_{\widehat{D}}$ mit $\#[[v]_\sim]_{\widehat{D}} = 1$ nur noch zeigen, dass v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von t_x und t_y ist.

Da die äußere Bahn Länge 1 hat, ist v bereits ein gemeinsamer Eigenvektor von t_x und t_y . Mit Lemma IV.1.1 folgt, dass er gemeinsamer Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist.

Wir suchen also die Zahl der eindimensionalen Untervektorräume von einem Vektorraum der Dimension x über \mathbb{F}_d . Für einen solchen Untervektorraum $\langle w \rangle$ kommen alle Vektoren w als Basisvektoren infrage außer dem Nullvektor. Wir haben also $d^x - 1$ Möglichkeiten. Zwei Vektoren w und w' erzeugen genau dann den gleichen Untervektorraum, wenn sie skalare Vielfache voneinander sind. Es gibt daher

$$\frac{d^x - 1}{d - 1}$$

Möglichkeiten. □

Falls nun n zusätzlich eine Primzahl ist, lassen sich die Anzahlen der Bahnen besonders einfach beschreiben.

Satz IV.1.3: *Sei zusätzlich zu d nun auch n prim mit $n \nmid d - 1$ und sei x wie in Proposition IV.1.2. Dann gibt es nur äußere Bahnen der Längen 1, n oder n^2 und es gilt*

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{d^x - 1}{d - 1}, \\ r_1 + r_n + r_{n^2} &= |\mathcal{O}_n^d| = \frac{1}{n^2} \sum_{t \in \widehat{D}} \frac{d^{\dim(\text{Eig}_d(t,1))} - 1}{d - 1}, \\ r_1 + n \cdot r_n + n^2 \cdot r_{n^2} &= \frac{d^N - 1}{d - 1}. \end{aligned}$$

Beweis: Nach der Bahnformel müssen die Bahnlängen die Gruppenordnung n^2 teilen. Da n prim ist, kommen für die Bahnlängen nur 1, n und n^2 infrage. Außerdem gilt, da n prim ist und $n \nmid d - 1$ gilt, dass n und $d - 1$ teilerfremd sind. Somit folgt die Formel für r_1 aus Proposition IV.1.2.

Für die zweite Gleichung benutzen wir das Lemma von Burnside. Es gilt demnach

$$|\mathcal{O}_n^d| = |\mathcal{T}_\sim / \widehat{D}| = \frac{1}{|\widehat{D}|} \sum_{t \in \widehat{D}} |\text{Fix}(t)|$$

mit $\text{Fix}(t) := \{[v]_\sim \mid [v \cdot t]_\sim = [v]_\sim\}$. Ein Element $[v]_\sim$ aus $\text{Fix}(t)$ ist also genau (bis auf den Nullvektor) ein eindimensionaler Untervektorraum eines Eigenraums von t . Wegen $t_x^n = t_y^n = I$ gilt, da \widehat{D} abelsch ist, auch $t^n = I$ und

somit können wir mit Lemma IV.1.1 schließen, dass v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 sein musste. Es gilt also

$$\text{Fix}(t) = \{\langle v \rangle \setminus \{(0, \dots, 0)\} \mid \langle v \rangle \subseteq \text{Eig}_d(t, 1)\}.$$

Wir zählen mit $|\text{Fix}(t)|$ also die eindimensionalen Untervektorräume von $\text{Eig}_d(t, 1)$. Nach derselben Argumentation, wie in Proposition IV.1.2, gilt

$$|\text{Fix}(t)| = \frac{d^{\dim(\text{Eig}_d(t, 1))} - 1}{d - 1}$$

und mit $|\widehat{D}| = n^2$ folgt die zweite Formel. Die dritte Formel folgt aus Korollar I.4.7 und der Tatsache, dass die Bahnen eine Partition auf \mathcal{T}_\sim bilden. \square

Sobald man die Größe x sowie die Dimensionen der Eigenräume der Matrizen aus \widehat{D} hat, kann man die drei Größen und anschließend r_n sowie r_{n^2} berechnen.

2. Stratum und Geschlecht

In diesem Abschnitt möchten wir das Stratum sowie das Geschlecht von Origamis aus \mathcal{O} bestimmen. Wir betrachten hierzu Origamis als *verzweigte Überlagerungen*.

Definition IV.2.1 (Verzweigte Überlagerung): Seien X, Y Riemannsche Flächen und $\Sigma = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq Y$ eine endliche Menge. Eine Abbildung $p : Y \rightarrow X$ heißt

- *holomorph*, wenn sie stetig und auf jeder Karte lokal holomorph ist.
- *verzweigte Überlagerung*, falls sie holomorph ist und auf dem Komplement von Σ eine Überlagerung im Sinne von Definition I.1.1 ist. Die Punkte aus Σ , auf welchen sich p nicht zu einer Überlagerung nach Definition I.1.1 fortsetzen lässt, heißen *Verzweigungspunkte*.

Sei $o : X \rightarrow T$ ein Origami. In Kapitel III haben wir X die Struktur einer Translationsfläche gegeben, indem wir die Struktur von T entlang von o geliftet haben. Insbesondere werden X und T somit zu Riemannschen Flächen. Nach dieser Definition folgt automatisch, dass o holomorph ist. Wir schreiben

$$\overline{T}_n := T_n \cup p_n^{-1}((0, 0)), \quad \overline{T} := T \cup \{0, 0\}$$

und \overline{X} für die *metrische Kompletierung* von X . Wir betrachten in diesem Abschnitt die zu o gehörende *verzweigte Überlagerung*

$$\overline{o} : \overline{X} \rightarrow \overline{T}.$$

Wir nehmen also die Gitterpunkte, die wir zu Beginn entfernt hatten, wieder in die Fläche hinein. Die Verzweigungspunkte sind enthalten in der Menge der Gitterpunkte $o^{-1}((0, 0))$; die beiden Mengen müssen jedoch nicht gleich sein (beispielsweise ist die Überlagerung $p_n : \overline{T}_n \rightarrow \overline{T}$ unverzweigt).

Aus der Theorie der Riemannschen Flächen folgt (siehe [Möl20, Proposition 2.11]), dass eine nicht-konstante holomorphe Überlagerung $f : Y \rightarrow X$ lokal in einem Punkt $y \in Y$ die Form $z \mapsto z^k$ für ein eindeutig bestimmtes k hat. Dieses k nennen wir die *Ordnung von f in y* . Falls $k > 1$ ist, so ist y ein Verzweigungspunkt und wir sagen, dass p den Verzweigungsindex

$$\text{ind}_f(y) := k - 1$$

in y hat.

Die Theorie der Translationsflächen liefert eine alternative Beschreibung des Verzweigungsindex (siehe z.B. [Mas06, Seite 1 f.]) über den Winkel in dem Punkt y . Im Allgemeinen haben wir beim Übergang von X zu \overline{X} Punkte y_i hinzugenommen, auf denen sich die Translationsstruktur nicht notwendigerweise fortsetzen lässt. Solche Punkte heißen *konische Singularitäten*. In diesen Punkten haben wir einen Winkel von $(k_i + 1) \cdot 2\pi$ mit $k_i \in \mathbb{N}^+$. Die Menge aller Translationsflächen mit der gleichen Anzahl von Singularitäten und den gleichen Winkeln in jeder Singularität heißt *Stratum* (siehe [Mas21, Seite 17 f.]) und wird mit

$$\mathcal{H}(k_1, \dots, k_m)$$

notiert. Falls wir zusätzlich eine Überlagerung haben, so ist k der Verzweigungsindex.

Beispiel IV.2.2: Wir betrachten die Überlagerung aus Beispiel I.4.4 zu $n = 2$, $d = 3$ und $v = (0, 1, 2, 2, 1)$ (bezüglich der Basis \mathcal{B}). Laufen wir hier um den Punkt $(1, 0)$ herum (dies entspricht der Schleife l_2), dann wechseln wir ein Mal die Kopie. Dies wird auch dadurch klar, dass der Vektor bezüglich der Schleifen-Basis $(2, 1, 2, 1, 1)$ ist (der Eintrag zu l_2 ist 1). Um zum Startpunkt zurückzukehren, müssen wir also 3 Mal um den Punkt laufen. Dies entspricht gerade der Ordnung von 1 in $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Wir erhalten einen Winkel von 6π (vgl. Abbildung IV.1), der Verzweigungsindex ist also $6/2 - 1 = 2$.

Wir erhalten also eine einfache Möglichkeit, mit unseren bereits berechneten Methoden die Verzweigungsindizes auszurechnen. Dies wird in der nachfolgenden Proposition zusammengefasst.

Proposition IV.2.3: Sei $p : X \rightarrow T_n$ eine Überlagerung aus \mathcal{C} , $o : X \rightarrow T$ das von p induzierte Origami und v eine Vektordarstellung von o bezüglich

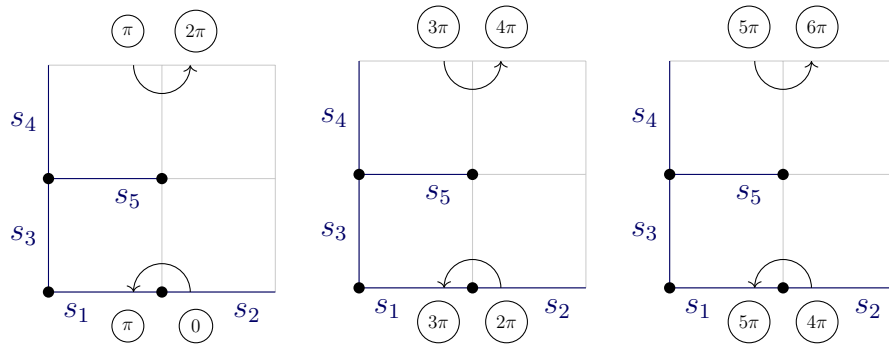


Abbildung IV.1.: Beim Ablaufen der Schleife l_2 ergibt wechseln wir die Kopie ein Mal. Um wieder zurück zu dem Anfangspunkt zu kommen, müssen wir einen Winkel von 6π ablaufen. Daher ist der Verzweigungsindex hier 2.

der Schleifen-Basis. Wir nummerieren die Gitterpunkte x_1, \dots, x_{n^2} von T_n genauso, wie die Schleifen l_i , und bezeichnen mit $\text{ord}(a, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ die Ordnung von $a \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Die Verzweigungspunkte von \bar{o} sind enthalten in der Menge

$$p^{-1}(\{x_1, \dots, x_{n^2}\})$$

und für einen Verzweigungspunkt y_i mit $p(y_i) = x_i$ gilt

$$\text{ind}_{\bar{o}}(y_i) = \begin{cases} \text{ord}(v_{i+2}, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) - 1, & \text{falls } i < n^2, \\ \text{ord}(v_3 + v_4 + \dots + v_N, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) - 1, & \text{falls } i = n^2. \end{cases}$$

Beweis: Dass die Verzweigungspunkte die Urbilder der Gitterpunkte sind folgt, weil wir ohne diese eine unverzweigte Überlagerung haben. Die Darstellung des Verzweigungsindex über die Ordnung folgt direkt aus der Definition des Verzweigungsindex als Winkel: Der $i+2$ -te Eintrag (nach Definition der \mathcal{S} -Basis) gibt an, wie oft die Kopie gewechselt wird. Beim einmaligen Umlaufen der Schleife erhalten wir einen Winkel von 2π . Folglich erhalten wir insgesamt einen Winkel von $\text{ord}(v_{i+2}, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \cdot 2\pi$ und somit einen Verzweigungsindex von $\text{ord}(v_{i+2}, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) - 1$.

Bei x_{n^2} nutzen wir wieder die Relation

$$l_{n^2} = (l_1 \cdots l_{n^2-1})^{-1}$$

in der Homologie sowie die Tatsache, dass $\text{ord}(-a, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) = \text{ord}(a, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ für alle $a \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ gilt. \square

Für Primzahlen d haben wir somit eine Möglichkeit bekommen, das Stratum besonders einfach zu berechnen.

Korollar IV.2.4: *Sei d prim, $o \in \mathcal{O}_n^d$ ein Origami und v eine Vektordarstellung von o bezüglich der Schleifen-Basis. Dann ist das Stratum von \bar{o} gegeben durch*

$$\mathcal{H}(\underbrace{d-1, \dots, d-1}_{k \text{ Mal}}),$$

wobei k die Anzahl der Elemente ungleich 0 in $(v_3, v_4, \dots, v_N, \sum_{i=3}^N v_i)$ ist.

Beweis: Da d prim ist, ist die Ordnung der Elemente in $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ entweder 1 oder d . Im ersteren Fall ist der Verzweigungsindex 0 und der Punkt somit kein Verzweigungspunkt. Im letzteren Fall ist der Verzweigungsindex $d-1$. \square

Beispiel IV.2.5: Wir betrachten erneut die Überlagerung aus Beispiel I.4.4. Eine Vektordarstellung bezüglich der Schleifen-Basis ist

$$(2, 1, 2, 1, 1).$$

Wichtig für die Berechnung des Stratums sind die Einträge v_3, v_4, v_5 . Keiner der Einträge ist in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gleich 0. Außerdem ist $2 + 1 + 1 = 1 \neq 0$. Somit ist das Stratum

$$\mathcal{H}(2, 2, 2, 2).$$

Die Verzweigungsindizes kann man mit den Geschlechtern der Flächen in Beziehung setzen. Dies ist der Inhalt des nachfolgenden Satzes, den wir hier nur zitieren werden.

Satz IV.2.6 (Riemann-Hurwitz-Formel): *Seien X, Y kompakte zusammenhängende Riemannsche Flächen und $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung von Grad n mit Verzweigungspunkten $y_1, \dots, y_j \in Y$. Sei weiterhin g das Geschlecht von Y und g' das Geschlecht von X . Dann gilt*

$$2g - 2 = n \cdot (2g' - 2) + \sum_{i=1}^j \text{ind}_p(y_i).$$

Beweis: Siehe [Möl20, Satz 3.47]. \square

Bemerkung IV.2.7: Man kann zeigen (siehe z.B. [Möl20, Satz 3.3]), dass für eine kompakte Fläche X und eine Überlagerung endlichen Grades $Y \rightarrow X$ die Fläche Y ebenfalls kompakt ist. Dies trifft auf Origamis zu, denn \bar{T} ist kompakt.

Die Riemann-Hurwitz-Formel gibt uns eine praktische Möglichkeit, aus den Verzweigungsindizes das Geschlecht von Flächen zu berechnen. Für Primzahlen erhalten wir wieder ein besonders schönes Ergebnis.

Satz IV.2.8: *Sei d prim. Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}(n, d)$ die Menge*

$$\{\text{Geschlecht}(X) \mid \exists o : X \rightarrow T \text{ mit } o \in \mathcal{O}_n^d\}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{G}(n, d) = \begin{cases} \{k \cdot \frac{d-1}{2} + 1 \mid 0 \leq k \leq n^2, k \neq 1\}, & \text{falls } d \neq 2, \\ \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor + 1\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Sei $p : X \rightarrow T_n \in \mathcal{C}$ und $o : X \rightarrow T$ das induzierte Origami. Wir nummerieren wieder die Gitterpunkte x_1, \dots, x_{n^2} von T_n genauso, wie die Schleifen l_i .

Der n -Torus \overline{T}_n hat Geschlecht 1. Mit Anwendung von Satz IV.2.6 gilt also die folgende Formel für die Bestimmung des Geschlechts g von \overline{X} (und somit von X):

$$g = \frac{s+2}{2} \quad \text{mit } s := \sum_{i=1}^{n^2} \text{ind}_{\overline{p}}(x_i)$$

Nach Korollar IV.2.4 ist s ein Vielfaches von $d-1$, hat also die Form $k \cdot (d-1)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Hierbei ist k die Anzahl der Verzweigungspunkte. Wir müssen für $d \neq 2$ begründen, wieso $k=1$ ausgeschlossen ist. Wäre der eine Verzweigungspunkt *nicht* x_{n^2} , so wäre genau ein Eintrag im Vektor (bis auf die ersten beiden) ungleich 0. Dann wäre aber auch x_{n^2} ein weiterer Verzweigungspunkt nach Korollar IV.2.4. Wäre x_{n^2} der Verzweigungspunkt, dann müssten die Einträge zu x_1, \dots, x_{n^2-1} alle gleich 0 sein. Dann wäre aber die Summe 0 und x_{n^2} könnte kein Verzweigungspunkt sein.

Nun müssen wir zeigen, dass alle angegebenen Geschlechter auch tatsächlich auftreten. Wir konstruieren hierfür für gegebenes k wie in den obigen Mengen jeweils Vektoren v , die (bzgl. der Schleifen-Basis) dann Origamis mit passenden Geschlechtern darstellen.

Sei zunächst $d \neq 2$. Für $k=0$ nehmen wir den Vektor

$$(1, 0, 0, \dots, 0).$$

Für jedes andere $k \neq 1$ nehmen wir den Vektor

$$(1, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1 \text{ Mal}}, 0, \dots, 0).$$

Falls $k - 1$ teilbar durch d ist, dann nehmen wir stattdessen den Vektor

$$(1, 0, \underbrace{1, \dots, 2}_{k-1 \text{ Mal}}, 0, \dots, 0).$$

Das Setzen der ersten Komponente auf 1 sorgt dafür, dass der resultierende Vektor garantiert erzeugend ist. Wir haben $k - 1$ Einträge auf eine Zahl ungleich 0 gesetzt (wegen $d \neq 2$ ist $2 \neq 0$) und weiterhin dafür gesorgt, dass die Summe $v_3 + \dots + v_N$ ungleich 0 ist. Wir haben also k Verzweigungspunkte und somit das Geschlecht $k \cdot (d-1)/2 + 1$.

Für $d = 2$ betrachten wir den Teilvektor (v_3, \dots, v_N) als Binärstring. Ist eine ungerade Anzahl an Bits gesetzt, so ist die Summe 1 und wir haben mit x_{n^2} einen zusätzlichen Verzweigungspunkt. Ist eine gerade Anzahl an Bits gesetzt, so ist x_{n^2} kein Verzweigungspunkt. In jedem Fall ist also unser k gerade und durchläuft die Menge $\{2i \mid 2i \leq n^2\}$. Somit durchläuft g die Menge

$$\left\{ 1, 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor + 1 \right\}.$$

□

Beispiel IV.2.9: Wir betrachten das Origami o_d aus Kapitel III, Abschnitt 5. Eine Vektordarstellung bezüglich der Basis \mathcal{S} ist

$$v = (1, -1, -3, 1, 1).$$

Wir erhalten für d prim und $d \neq 3$ nach Korollar IV.2.4 das folgende Stratum und nach Satz IV.2.6 das folgende Geschlecht g :

$$\mathcal{H}(d-1, d-1, d-1, d-1) \quad g = 2(d-1) + 1$$

Für $d = 3$ gibt es nur drei Verzweigungspunkte (jeweils mit Verzweigungsindex 2) und somit ist das Geschlecht 4.

Anhang A.

Algorithmus zur Suche nach Origamis mit gegebener Veech-Gruppe

Algorithmus 5

```
1 EigenspacesModuloTranslations := function(field, mat,
  ↪ translation_mats)
2   local spaces, t;
3   spaces := [];
4   for t in translation_mats do
5     Append(spaces, Eigenspaces(field, mat*t));
6   od;
7   return spaces;
8 end;
9
10 FindSimultaneousEigenvectorsRecursivelyHelper :=
  ↪ function(field, mats, i, translation_mats)
11   local space1, space2, tmp, res;
12   if i = 1 then
13     return Eigenspaces(field, mats[1]);
14   else
15     res := [];
16     for space1 in
  ↪ FindSimultaneousEigenvectorsRecursivelyHelper(field,
  ↪ mats, i-1, translation_mats) do
17       for space2 in EigenspacesModuloTranslations(field,
  ↪ mats[i], translation_mats) do
18         tmp := Intersection(space1, space2);
```

```

19         if Dimension(tmp) > 0 then
20             Add(res, tmp);
21         fi;
22     od;
23 od;
24 return res;
25 fi;
26 end;
27
28 FindSimultaneousEigenvectorsRecursively := function(p, mats,
    ↪ translation_mats)
29     return FindSimultaneousEigenvectorsRecursivelyHelper(GF(p),
    ↪ List(mats, m->m*One(GF(p))), Length(mats),
    ↪ translation_mats);
30 end;
31
32 IsEigenvector := function(M, d, v)
33     local w, a;
34     w := (v*M) mod d;
35     for a in [0..(d-1)] do
36         if a*v mod d = w then
37             return true;
38         fi;
39     od;
40     return false;
41 end;
42
43 IsStabilizedBy := function(d, mat, translation_mats, v)
44     local t;
45     for t in translation_mats do
46         if IsEigenvector(mat * t, d, v) then
47             return true;
48         fi;
49     od;
50     return false;
51 end;
52
53 SearchForOrigamiWithVeechGroup := function(n, p, H)
54     local d, mats_sl2z, matrices, sim_vec, o, sim_vecs,
    ↪ veech_ind,

```

```

55 eigSpaces, esp, sim_vec_int, translations, S, T;
56
57 if not IsPrimeInt(p) or n <= 1 then
58     Error("p must be prime and n a natural number > 1");
59 fi;
60
61 d := p;
62 mats_sl2z := MatrixGeneratorsOfGroup(H);
63 matrices := List(mats_sl2z,
64     ↪ m->Inverse(ActionOfMatrixOnHomologyOfTn(n, m)));
65 translations := TranslationGroup(n);
66 eigSpaces := FindSimultaneousEigenvectorsRecursively(p,
67     ↪ matrices, translations);
68 S := Inverse(ActionOfSOnHomologyOfTn(n));
69 T := Inverse(ActionOfTOnHomologyOfTn(n));
70
71 for esp in eigSpaces do
72     if Dimension(esp) = 0 then
73         continue;
74     fi;
75     for sim_vec in esp do
76         sim_vec_int := List(sim_vec, i->IntFFE(i)) mod p;
77         if Gcd(Concatenation(sim_vec_int, [d])) <> 1 then
78             # this is not a generating tuple and thus
79             ↪ won't be an Origami
80             continue;
81         fi;
82         if not (IsStabilizedBy(d, S, translations,
83             ↪ sim_vec_int) and IsStabilizedBy(d, T,
84             ↪ translations, sim_vec_int)) then
85             return sim_vec_int; # success!
86         fi;
87     od;
88 od;
89
90 return false;
91 end;

```

Anhang B.

Origamis mit Kongruenzuntergruppen als Veech-Gruppen

Wir geben im Folgenden die Origamis an, die bei der Ausführung von Algorithmus 5 gefunden wurden. Eine Übersicht findet man in Table III.1. Wir geben jeweils eine Vektordarstellung bezüglich der Basis \mathcal{S} sowie für Origamis kleiner Grade eine Permutationsdarstellung an.

$H_2, n = 4, d = 3$

```
1   sigma_x := ( 1, 2, 3, 4)( 5, 6, 7,  
    ↪ 8,21,22,23,24,37,38,39,40)(  
    ↪ 9,10,11,12,41,42,43,44,25,26,27,28)(13,14,15,16)(17,18,  
    ↪ 18,19,20)(29,30,31,32)(33,34,35,36)(45,46,47,48);  
2   sigma_y := ( 1,21,41,13)( 2,38,26,46,34,22,10,30,18,  
    ↪ 6,42,14)( 3, 7,43,31,19,23,11,47,35,39,27,15)( 4,  
    ↪ 8,12,16)( 5,25,45,33)(  
    ↪ 9,29,17,37)(20,24,28,32)(36,40,44,48);  
3   v := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1];
```

$H_2, n = 4, d = 5$

```
1   v := [0, 0, 1, 4, 1, 4, 4, 2, 2, 4, 1, 2, 1, 2, 4, 4, 2];
```

$H_2, n = 8, d = 2$

```
1   v := [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0,  
    ↪ 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0,  
    ↪ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0,  
    ↪ 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0 ];
```

H₂, n = 8, d = 3

```

1   v := [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1,
        ↪ 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0,
        ↪ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0,
        ↪ 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1 ];

```

H₂, n = 8, d = 5

```

1   v := [ 0, 0, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2,
        ↪ 4, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 1,
        ↪ 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 1, 2, 1,
        ↪ 2, 1, 2, 1, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2 ];

```

H₃, n = 3, d = 3

```

1   sigma_x := ( 1, 2, 3, 10, 11, 12, 19, 20, 21)( 4, 5, 6)( 7, 8,
        ↪ 9, 25, 26, 27, 16, 17, 18)( 13, 14, 15)( 22, 23, 24);
2   sigma_y := ( 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25)( 2, 14, 8)( 3, 6,
        ↪ 9, 21, 24, 27, 12, 15, 18)( 5, 26, 20)( 11, 23, 17);
3   v := [ 1, 1, 0, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2 ];

```

H₃, n = 3, d = 5

```

1   sigma_x := ( 1, 2, 3, 10, 11, 12, 19, 20, 21, 28, 29, 30, 37, 38, 39)(
        ↪ 4, 5, 6)( 7, 8, 9, 43, 44, 45, 34, 35, 36, 25, 26, 27, 16, 17,
        ↪ 18)( 13, 14, 15)( 22, 23, 24)( 31, 32, 33)( 40, 41, 42);
2   sigma_y := ( 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43)(
        ↪ 2, 14, 8)( 3, 6,
        ↪ 9, 39, 42, 45, 30, 33, 36, 21, 24, 27, 12, 15, 18)(
        ↪ 5, 44, 38)( 11, 23, 17)( 20, 32, 26)( 29, 41, 35);
3   v := [ 1, 1, 0, 4, 4, 1, 1, 4, 1, 4 ];

```

H₅, n = 5, d = 7

```

1   v := [ 1, 6, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 5, 3, 6, 5, 5, 6,
        ↪ 3, 6, 5, 5, 6, 3, 5, 6, 6 ];

```

H₇, n = 7, d = 3

```

1   v := [ 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1,
        ↪ 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2,
        ↪ 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1 ];

```

H₇, n = 7, d = 5

1 $v := [1, 4, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3,$
 $\hookrightarrow 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2,$
 $\hookrightarrow 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3];$

H₇, n = 7, d = 7

1 $v := [1, 6, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 2, 2, 5, 5, 5, 2,$
 $\hookrightarrow 5, 5, 5, 2, 5, 2, 2, 5, 2, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 5, 5, 5,$
 $\hookrightarrow 2, 5, 2, 2, 5, 2, 5, 5, 5, 2, 5, 5, 5, 2, 2];$

H'₇, n = 7, d = 3

1 $v := [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1,$
 $\hookrightarrow 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2,$
 $\hookrightarrow 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2];$

H'₇, n = 7, d = 5

1 $v := [1, 4, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 3,$
 $\hookrightarrow 3, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 2,$
 $\hookrightarrow 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 2];$

Literatur

- [21] *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1*. The GAP Group. 2021. URL: <https://www.gap-system.org>.
- [Aul20] David Aulicino. *Siegel-Veech Constants of Cyclic Covers of Generic Translation Surfaces*. Seminar of Algebra and Number Theory. Feb. 2020. URL: <https://www.math.uni-sb.de/ag/weitze/index.php/en/research/oberseminaren>.
- [EM12] Jordan S. Ellenberg und D. B. McReynolds. „Arithmetic Veech sublattices of $SL(2, \mathbb{Z})$ “. In: *Duke Mathematical Journal* 161.3 (Feb. 2012). ISSN: 0012-7094. DOI: 10.1215/00127094-1507412. arXiv: 0909.1851v3 [math.GT]. URL: <http://dx.doi.org/10.1215/00127094-1507412>.
- [For81] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 1981. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-5961-9>.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521795401. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Her12] Frank Herrlich. *Introduction to Origamis in Teichmüller Space*. 2012. URL: <https://www.math.kit.edu/iag3/~herrlich/media/masterclass.pdf>.
- [LS15] Roger C Lyndon und Paul E Schupp. *Combinatorial group theory*. Springer, 2015. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-61896-3>.
- [Mas06] Howard Masur. „Ergodic theory of translation surfaces“. In: *Handbook of dynamical systems* 1 (2006), S. 527–547. URL: <http://homepages.math.uic.edu/~masur/hand6.pdf>.

Literatur

- [Mas21] Daniel Massart. *A short introduction to translation surfaces, Veech surfaces, and Teichmueller dynamics*. 2021. arXiv: 2107.11581 [math.DS].
- [ModularGroup] L. L. Junk und G. Weitze-Schmithüsen. *ModularGroup, Finite-index subgroups of $(P)SL(2, \text{Integers})$, Version 1.0.0*. <https://ag-weitze-schmithusen.github.io/ModularGroup>. GAP package. Sep. 2021.
- [Möl20] Martin Möller. *Riemannsche Flächen*. März 2020. URL: <https://www.uni-frankfurt.de/68893918/riemannflaechen.pdf>.
- [Oli10] Frank-Olaf Schreyer Oliver Labs. *Algebraische Topologie. Eine kurze Einführung*. 2010. URL: https://www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/images/PDFs/teaching/ss18_algtop/10_AlgTop.pdf.
- [Origami] S. Ertl u. a. *Origami, Computing Veech groups of origamis, Version 1.0.0*. <https://AG-Weitze-Schmithusen.github.io/Origami/>. GAP package. Mai 2021.
- [Sch04] Gabriela Schmithüsen. „An algorithm for finding the Veech group of an origami“. In: *Experimental Mathematics* 13.4 (2004), S. 459–472. URL: <http://de.arxiv.org/abs/math/0401185>.
- [Sch05] Gabriela Schmithüsen. „Veech Groups of Origamis“. Diss. Universität Karlsruhe, 2005. URL: <https://www.math.kit.edu/iag3/~schmithuesen/media/dr.pdf>.
- [Vee89] W.A. Veech. „Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards.“ In: *Inventiones mathematicae* 97.3 (1989), S. 553–584. URL: <http://eudml.org/doc/143714>.