UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Prof. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Msc. Manuel Kany
Msc. Pascal Kattler

Seminar im Sommersemester 2022 – Fuchssche Gruppen

1. **Übersichtsvortrag zur hyperbolischen Geometrie** [Kat92, S.1 - S.22]
   In diesem Einführungsvortrag wird an Definition und Eigenschaften der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ versehen mit der hyperbolischen Metrik und an die Aktion von Möbiustransformationen darauf erinnert.
   Stichwortliste: Hyperbolische Metrik; Geodätische; Möbiustransformationen und ihre schönen Eigenschaften: Winkeltreue, Orientierungstreue, Kreistreue; Elementartypen von Möbiustransformationen; $\mathrm{PS}^*\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ als Isometriegruppe; Einheitskreisscheibenmodell; hyperbolischer Flächeninhalt; die Formel von Gauß-Bonnet. (Diesen Vortrag übernehmen wir.)

2. **Fuchssche Gruppen** [Kat92, S.23 - S.34]
   In diesem Vortrag werden Fuchssche Gruppen als diskrete Untergruppen von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ eingeführt. Höhepunkt des Vortrags ist zu zeigen, dass eine Gruppe genau dann Fuchssch ist, wenn Sie eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operiert. Außerdem wird der wichtige Begriff der Limesmenge eingeführt.
   Stichwortliste: Elliptische, parabolische, hyperbolische Transformationen. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ als topologischer Raum. Fuchssche Gruppen; Beispiele für Fuchssche Gruppen; Untergruppen der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sind genau dann Fuchssch, wenn ihre Aktion auf der oberen Halbebene eigentlich diskontinuierlich ist. Limesmengen $\Lambda(\Gamma)$ von Fuchsschen Gruppen.

3. **Elementare Fuchssche Gruppen und die Ungleichung von Jørgensen** [Kat92, S.34 - S.46]
   In diesem Vortrag führen wir *elementare Fuchssche Gruppen* ein, die sich in manchen Dingen anders verhalten als die anderen Fuchsschen Gruppen. Höhepunkt des Vortrags ist die Klassifikation aller elementaren Fuchsschen Gruppen und die Ungleichung von Jørgensen, die für nicht-elementare Gruppen gilt.
   Stichwortliste: Abelsche Fuchssche Gruppen sind zyklisch, keine Fuchssche Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Der Normalisator einer Fuchsschen Gruppe ist Fuchssch. Elementare Gruppen und ihre Eigenschaften. Klassifikation der elementaren Fuchsschen Gruppen. Nichtelementare Gruppen enthalten hyperbolische Elemente. Gruppen ohne elliptische Elemente sind entweder elementar oder diskret. Die Ungleichung von Jørgensen. Eine nichtelementare Gruppe ist genau dann diskret, wenn alle Untergruppen, die von zwei ihrer Elemente erzeugt werden, diskret sind.

4. **Fundamentalbereiche** [Kat92, S.49 - S.56]. evtl. Teile aus: [Shi94, 1.6]
   Ein wichtiges Werkzeug, um Fuchssche Gruppen zu beschreiben sind *Fundamentalbereiche*. In diesem Vortrag werden diese eingeführt und mit dem Dirichlet-Bereich eine praktische Anleitung gegeben, wie man einen schönen Fundamentalbereich erhält. Als Spezialfälle wollen wir uns die Fundamentalbereiche von Dreiecksgruppen anschauen und eventuell noch Kongruenzgruppen betrachten.
   Stichwortliste: Fundamentalbereiche und Pflasterungen; Flächeninhalt des Fundamentalbereichs ist eine Invariante; Fundamentalbereiche von Untergruppen. Dirichlet- Bereiche und ihre Gestalt; Beispiele: Dreiecksgruppen, die Modulgruppe (als Beispiel einer Dreiecksgruppe) und Kongruenzuntergruppen.

5. **Isometrische Kreise und Ford-Fundamentalbereiche** [Kat92, S.57 - S.67]
   In diesem Vortrag lernen wir eine zweite Konstruktionsmöglichkeit von Fundamentalbereichen kennen: den Ford-Fundamentalbereich. Die Werkzeuge dazu werden später nützlich sein, um die Limespunkte einer Fuchsschen Gruppe besser zu verstehen und die Fuchsschen Gruppen in Gruppen erster und zweiter Art zu unterscheiden.
   Stichwortliste: Isometrische Kreise von Transformationen und ihre Eigenschaften. Orientierungstreue Isometrien im Einheitskreismodell. Ford-Fundamentalbereiche. Die Radien einer unendlichen Folge von isometrischen Kreisen konvergieren gegen 0. $\Lambda(\Gamma)$ als Limesmenge der Mittelpunkte isometrischer Kreise. Fuchssche Gruppen erster und zweiter Art.

6. **Struktur von Dirichlet-Bereichen** [Kat92, S.67 - S.77]
   In diesem Vortrag werden wir schließlich sehen, wie die geometrischen Eigenschaften des Dirichlet-Bereichs mit den algebraischen Eigenschaften der Gruppe zusammenhängen. Damit lassen sich insbesondere die geometrischen Kenndaten der zugehörigen Riemannschen Fläche (siehe Vortrag 7) aus den algebraischen Eigenschaften der Gruppe ablesen.
   Stichwortliste: Dirichlet-Bereiche sind lokal endlich. Kongruente Ecken; Zusammenhang zwischen elliptischen Zyklen und Konjugationsklassen maximaler endlicher zyklischer Untergruppen. Perioden; parabolische Klassenzahl; Zusammenhang zwischen Innenwinkeln und Perioden. Kongruente Seiten; "Verklebe-Transformationen" erzeugen die Fuchssche Gruppe.

7. **Riemannsche Flächen und Fuchssche Gruppen** [Kat92, 4.1,4.2],[For77, 1.1]
   In diesem Vortrag lernen wir nun, wie jede Fuchssche Gruppe eine Riemannsche Fläche definiert. Umgekehrt erhält man fast jede Riemannsche Fläche auf diese Weise. Als ein wichtiges Ergebnis klassifizieren wir Fuchssche Gruppen, für die die zugehörige Riemannsche Fläche kompakt ist. (Für das Halten dieses Vortrags sollte man Grundkenntnisse in Funktionentheorie haben.)
   Stichwortliste: Riemannsche Flächen; Fast jede Riemannsche Fläche ist Quotient von $\mathbb{H}$ nach einer Fuchsschen Gruppe. Der Beweis verwendet die universelle Überlagerung und den Riemannschen Abbildungssatz, was wir hier ohne Beweis verwenden werden. (Literatur wird beim Betreuen des Vortrags je nach Vorkenntnissen direkt gegeben); Geometrisch endliche und kokompakte Fuchssche Gruppen: Siegels Theorem. Eine Fuchssche Gruppe ist genau dann kokompakt, wenn

jeder Dirichlet Bereich kompakt ist. Eine Fuchssche Gruppe ist genau dann kokompakt, wenn der Quotient $\mathbb{H}/\Gamma$ endlichen Flächeninhalt hat und die Gruppe keine parabolischen Elemente enthält.

8. **Die Signatur einer Fuchsschen Gruppe und die Horozykeltopologie** [Kat92, 4.3]
   In diesem Vortrag lernen wir die *Signatur* von Fuchsschen Gruppen kennen, die die geometrischen Kenngrößen der zugehörigen Riemannschen Fläche zusammenfasst. Als einen Höhepunkt sehen wir insbesondere, wie man zu jeder möglichen zulässigen Signatur eine Fuchssche Gruppe mit diesen Kenndaten konstruieren kann. Weiterhin wollen wir lernen, wie man durch Hinzunahme der *Spitzen* einer Fuchsschen Gruppe zu $\mathbb{H}$ dafür sorgen kann, dass die zugehörige Riemannsche Fläche teil-vervollständigt wird. Zu diesem Zweck lernen wir die Horozykeltopologie kennen.
   Stichwortliste: Definition der Signatur. Formel für den Flächeninhalt des Quotienten $\mathbb{H}/\Gamma$ in Abhängigkeit zur Signatur von Γ. Falls diese Formel für eine gegebene Signatur positiven Flächeninhalt hat, dann gibt es eine Fuchssche Gruppe mit dieser Signatur. Präsentationen von Fuchsschen Gruppen mit gegebener Signatur. Spitzen und die Horozykeltopologie. (Literatur zum letzten Punkt wird beim Betreuen direkt gegeben; dieser Teil des Vortrags ist recht fortgeschritten.)

9. **Fuchssche Gruppen erster und zweiter Art** [Kat92, 4.5,4.6]
   In diesem Vortrag studieren wir die geometrische Unterscheidung von Fuchsschen Gruppen in *Gruppen erster* und *Gruppen zweiter Art*. Für Gruppen zweiter Art ist die zugehörigen Riemannsche Fläche in gewisser Hinsicht wild und aufregend. Fuchssche Gruppen erster Art führen zu Riemannschen Flächen, die durch endlich viele Punkte kompaktifiziert werden können.
   Stichwortliste: Wiederholung: Fuchssche Gruppen erster Art. Fuchssche Gruppen sind genau dann von erster Art, wenn der entsprechende Fundamentalbereich endlichen Flächeninhalt hat. Eine endlich erzeugte Fuchssche Gruppe hat geometrisch endlichen Typ.

10. **Veechgruppen als Fuchssche Gruppen** [EM12],[Ran13, 4.3]
    Es werden kurz Translationsflächen und Veechgruppen eingeführt und gezeigt, dass Veechgruppen Fuchssche Gruppen sind, die niemals kokompakt sind. Anschließend werden einige Beispiele von schönen Veechgruppen gegeben.
    Stichwortliste: Translationsflächen, affine Homöomorphismen, Veechgruppen; Veechgruppen sind Fuchssche Gruppen; Veechgruppen sind nicht kokompakt; Beispiele für Translationsflächen und ihre Veechgruppen, z.B. das goldene L und Origamis. (Dieser Vortrag sollte von jemandem gehalten werden, der bereits weiß, was Translationsflächen sind; Literatur zu den Beispielen wird je nach Interesse beim Betreuen direkt gegeben.)

Mehr zu Fuchsschen Gruppen findet man zum Beispiel auch in dem Lehrbuch [Bea77].

Literatur

[Bea77] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Discrete groups and automorphic functions (Proc. Conf., Cambridge, 1975), Academic Press, London, 1977, pp. 47–72. MR 0474012

[EM12] Clifford J. Earle and Albert Marden, *On holomorphic families of Riemann surfaces*, Conformal dynamics and hyperbolic geometry, Contemp. Math., vol. 573, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 67–97. MR 2964074

[For77] Otto Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag, 1977.

[Kat92] Svetlana Katok, *Fuchsian Groups (Chicago Lectures in Mathematics)*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1992.

[Ran13] Anja Randecker, *Unendliche Translationsflächen*, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), 2013, Lecture notes (in German).

[Shi94] Goro Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1994.