



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

WS 2005/2006

12. Übung

Aufgabe 1 (Exponentielles Wachstum) Wir haben in unserem (Gedankenexperimente-)Labor eine Kolonie unseres Bakteriums *Ewald*. Wir stellen *Ewald* konstante, ideale Bedingungen zur Verfügung: Nährstoffe in unbegrenzter Menge, genügend Platz, und was *Ewald* sonst so braucht.

- (a) Modellieren Sie den Populationsumfang $N(t)$ der Kolonie durch eine Differentialgleichung. Orientieren Sie sich dabei am Vorbild des radioaktiven Zerfalls (Vorlesung) und nehmen Sie den Zuwachs pro Zeiteinheit als proportional zur Anzahl N an.
- (b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung.
- (c) Finden Sie *die* Lösung, bei der die Anzahl an *Ewalds* zur Zeit $t = 0$ gerade N_0 ist.
- (d) In welcher früheren Übungsaufgabe haben wir gelernt, wie man die Proportionalitätskonstante, die in unserem Ansatz vorkommt, experimentell bestimmen kann?

Aufgabe 2 (Differentialgleichungen mit getrennten Variablen) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen.

(a) $y' = -3x^2y^2$ (b) $4y' = \sqrt{y}xe^x$ (c) $y' = \frac{x \cos x}{\sin y}$

Aufgabe 3 (Beschränktes Wachstum II) Nun stellen wir *Ewald* nicht mehr ideale Bedingungen zur Verfügung, sondern nur noch eine begrenzte Nährstoffmenge.

- (a) Modellieren Sie das Wachstum der Kolonie, indem Sie den Ansatz »Beschränktes Wachstum I« aus der Vorlesung realistischer gestalten: Setzen Sie den Zuwachs pro Zeiteinheit nicht nur proportional zu den freien Ressourcen $R = k(N_{\max} - N)$ an, sondern auch noch proportional zum aktuellen Populationsumfang N . (Also insgesamt proportional zu $N(N_{\max} - N)$.)
- (b) Finden Sie wie in Aufgabe 1 erst *alle* Lösungen der sich ergebenden Differentialgleichung, und dann die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung $N(t = 0) = N_0$. Welche *stationären* Lösungen gibt es?
- (c) In welcher früheren Übungsaufgabe kommt eine solche Differentialgleichung vor? Welchen Namen hat die Gleichung? (Lassen Sie sich nicht verwirren: Dort hatten die Konstanten andere Namen.)

Aufgabe 4 (lineare Differentialgleichungen) Eine Differentialgleichung der Form

$$y' - f(x)y = 0$$

heißt *homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung*.

- (a) Mit welcher uns bekannten Methode kann man eine solche Gleichung lösen?
- (b) Lösen Sie die Gleichung $y' - y \cos(x) = 0$.
- (c) Finden Sie die spezielle Lösung mit $y(0) = 1$.
- (d) Finden Sie die spezielle Lösung mit $y'(0) = 12$.

Aufgabe 5* (Beschränktes Wachstum III) Stellen wir (wie in der Vorlesung angegeben) *Ewald* eine konstante Menge an Nährstoffen pro Zeiteinheit zur Verfügung, setzen die verbrauchten Ressourcen als

$$c \int_0^t N(t) dt$$

an, die verbleibenden Ressourcen als

$$R = rt - c \int_0^t N(t) dt$$

und die Zuwachsrate als $\dot{N} = kNR$. Dabei sind r , c und k Konstanten. Die resultierende Gleichung

$$\dot{N} = kN \left(rt - c \int_0^t N(t) dt \right)$$

ist für uns zu schwer zu lösen. Aber wir können spezielle Lösungen finden:

- (a) Welche *stationären* Lösungen mit *konstanter* Anzahl $N(t) = N_{\text{stat}}$ erfüllen die Gleichung?
- (b) Wie ist das Ergebnis im Fall $r = 0$ zu interpretieren? Was hält *Ewald* davon?

Abgabe: Mittwoch, 8.2.2006, bis 14:00 Uhr in dem mit »Mathe für Biologen« und Ihrer Übungsgruppe gekennzeichneten Briefkasten am unteren Eingang des Hörsaalgebäudes.