UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 ♦ Mathematik
Dr. Benedikt Betz
Gebäude E2 4, Zimmer 412
benedikt@math.uni-sb.de

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
WS 2005/2006
4. Übung

Aufgabe 1 (Geometrische Reihe) Die Berechnung der Futtermenge in Aufgabe 2 der 3. Übung stellt uns vor das Problem, die Partialsummen der geometrischen Reihe zu berechnen. Dort waren nur wenige Summanden zu addieren. Im Allgemeinen ist es nützlich, eine Formel für die Partialsummen zu haben.

(a) Finden Sie eine Formel für

$$\sum_{n=0}^{N} q^n,$$

indem Sie den Term

$$(1-q)\left(\sum_{n=0}^{N} q^n\right) = (1-q)(q^0 + q^1 + \cdots + q^N)$$

vereinfachen.

(b) Berechnen Sie jetzt für $|q| < 1$ mit Hilfe dieser Formel den Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n.$$

Stimmt der in der Vorlesung angegebene Wert?

Aufgabe 2 Finden Sie auch eine Formel für $\sum_{n=1}^{N} n$, die Summe der ersten N natürlichen Zahlen? (Eine solche Summe kommt bei der Berechnung der Futtermenge in Aufgabe 1 der 3. Übung vor.) Betrachten Sie als Hilfestellung die nebenstehende Skizze. (Dort ist $N = 4$.)

Aufgabe 3 (Achill und die Schildkröte) Folgende Überlegung geht auf den griechischen Philosophen Zenon von Elea (495–435 v. Chr.?) zurück, der damit den Begriff der Bewegung *ad absurdum* zu führen suchte: Achill (der ein guter Läufer gewesen sein soll) und eine Schildkröte verabreden einen Wettlauf. Da Achill zehnmal so schnell ist wie die Schildkröte, bekommt diese einen Vorsprung von 100 Metern. Wenn Achill also den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, ist diese bereits 10 m weiter. Ist Achill dort, ist die Schildkröte 1 m vor ihm, und so weiter. Immer ist die Schildkröte vorn, Achill verliert also den Wettlauf.

(a) Nach welcher Strecke und nach welcher Zeit sind Achill und die Schildkröte gleichauf? (Nehmen wir an, Achill laufe 100 Meter in 10 Sekunden.) Welche Reihe kommt hier vor?

(b) Was würden Sie Zenon entgegnen?

Aufgabe 4 Überprüfen Sie die nachstehenden Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Alterniertheit.

(a) $a_n = \dfrac{n^2+5}{n^2+3}$ (b) $b_n = (-1)^{n+1}(n^3 - n^2)$ (c) $c_n = (-1)^{2n+2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Aufgabe 5 (Noch ein paar Grenzwerte zum Knobeln) Berechnen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen. Erläutern Sie Ihre Rechnung!

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (b) $b_n = \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{7}{7 + \frac{1}{n^{3/2}}}$ (c) $c_n = \dfrac{2}{n^2-4} - \dfrac{1+2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

Abgabe: Mittwoch, 23. 11. 2005, bis 14:00 Uhr in dem mit »Mathe für Biologen« und Ihrer Übungsgruppe gekennzeichneten Briefkasten am unteren Eingang des Hörsaalgebäudes.