

**Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
WS 2005/2006
Abschlussklausur**

Geben Sie zu allen Ergebnissen die notwendigen Rechenschritte und Begründungen an!

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen und Determinanten) Berechnen Sie die Determinante der Matrizen:

$$(a) \begin{pmatrix} e^{5i} & e^{\pi i} \\ e^{\pi i} & e^{-5i} \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 2 & -i + 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4i - 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (Matrizenmultiplikation) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, ob folgende Matrizenprodukte definiert sind, und berechnen Sie diejenigen Matrizenprodukte, die definiert sind.

$$(a) AB \quad (b) B^2 \quad (c) A^2 \quad (d) DA \quad (e) CA \quad (f) BC$$

Aufgabe 3 (Lineare Gleichungssysteme) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Grenzwerte, Folgen, Reihen)

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + \sqrt{n} - 17}{23n^2 - 2n^5 + \frac{1}{n}} \quad (ii) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{3^n} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(b) Konvergieren folgende Reihen?

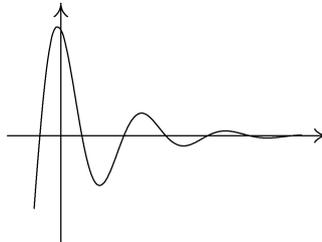
$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

Aufgabe 5 (Kurvendiskussion)

(a) Genau eine der Funktionen

$$e^x \cdot \cos x, \quad e^{-x} \cdot \sin x, \quad e^{-x} \cdot \cos x$$

hat den folgenden Graphen. Welche?



(b) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{x+1}$$

auf Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$, Nullstellen, Vorzeichenverhalten, Monotonie und Krümmung und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

Aufgabe 6 (Extremwerte) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion

$$f: [-2, 7] \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - 6x^2 - 15x - 2.$$

Aufgabe 7 (Integrale) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$(a) \int \frac{\cos x \cdot \ln(\sin x)}{\sin x} dx \quad (b) \int \frac{x-3}{x^2+2x} dx$$

Hinweis: Bei (a) führt die Substitution $t = \sin x$ weiter, bei (b) die Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 8 (Differentialgleichungen) Finden Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, die die angegebene Anfangsbedingung erfüllt:

$$(a) y' = xy^2, \quad y(0) = 1$$

$$(b) y' = \frac{y}{x} + x + 3, \quad y(1) = 1$$

Viel **E**rfolg!