UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 ♦ Mathematik
Dr. Benedikt Betz
Gebäude E2 4, Zimmer 412
benedikt@math.uni-sb.de

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
WS 2005/2006
Abschlussklausur
Lösungshinweise

Aufgabe 1

(a)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} e^{5i} & e^{\pi i} \\ e^{\pi i} & e^{-5i}\end{pmatrix} &= e^{5i}\cdot e^{-5i} - e^{\pi i}\cdot e^{\pi i} \\ &= 1 - e^{2\pi i} = 1 - (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 2 & -i+3 & 1 \\ 3 & 1 & 4i-1\end{pmatrix} &= 1\cdot(-i+3)\cdot(4i-1) + i\cdot 1\cdot 3 + 0 \\ &\quad -0 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot i\cdot(4i-1) \\ &= 4 + i + 12i - 3 + 3i - 1 + 8 + 2i = 8 + 18i\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a)

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 9 \\ 18 & 22 & 15\end{pmatrix}$$

(b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 8 & 9 & 7 \\ 8 & 8 & 7\end{pmatrix}$$

(c) A^2 ist nicht definiert.

(d)

$$DA = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 10\end{pmatrix}$$

(e) CA ist nicht definiert.

(f)

$$BC = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 10\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(II–I, III–I, IV–2·I, V–2·I)}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(IV+II, V-II, II}\leftrightarrow\text{III)}$$

Wähle $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ergibt sich durch rückwärts Einsetzen:
$x_3 = 1 - \lambda$,
$x_2 = -4(1-\lambda) - 3\lambda - 1 = -5 + \lambda$,
$x_1 = 1 - 2(-5+\lambda) - 3(1-\lambda) - 4\lambda = 8 - 3\lambda$, also:

$$\mathbb{L} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Man kann auch $x_3 = \lambda$ wählen, dann ergibt sich eine andere Darstellung der Lösung.)

Aufgabe 4

(a) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5+\sqrt{n}-17}{23n^2-2n^5+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^4\sqrt{n}}-\frac{12}{n^5}}{\frac{23}{n^3}-2+\frac{1}{n^6}} = \frac{1+0-0}{0-2+0} = -\frac{1}{2}$.

(ii) $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}$. (Geometrische Reihe.)

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$. (De l'Hospital)

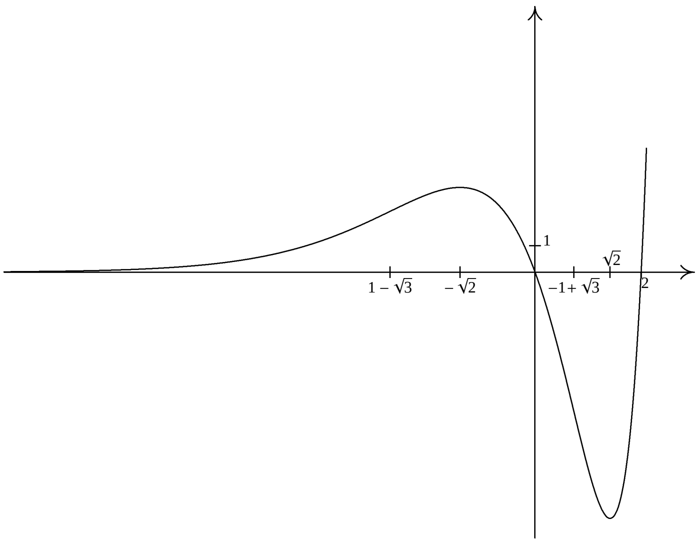
(b) (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\infty = \infty$. (Harmonische Reihe.) Die Reihe divergiert.

(ii) $(-1)^n\frac{1}{n^2}$ ist alternierend, $\frac{1}{n^2}$ geht monoton fallend gegen 0, also konvergiert nach Leibniz die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$.

Aufgabe 5

(a) Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ kommen nur die Varianten mit e^{-x} in Frage. $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin x$ scheidet aus, da bei $x = 0$ keine Nullstelle vorliegt. Also bleibt nur die Möglichkeit $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \cos x$.

(b) Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (de l'Hospital).
Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 2$.
Vorzeichen von f: $+ - +$
(e^{x+1} ist positiv, also Vorzeichen von f gleich Vorzeichen von $x^2 - 2x$, und das ist eine nach oben geöffnete Parabel mit zwei Nullstellen.)
Ableitung: $f'(x) = (x^2 - 2)e^{x+1}$.
Nullstellen der Ableitung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$
Monotonie: $\nearrow\searrow\nearrow$
(Betrachte das Vorzeichen von f': $+ - +$.)
Zweite Ableitung: $f''(x) = (x^2 + 2x - 2)e^{x+1}$.
Nullstellen der zweiten Ableitung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$.
Krümmung: links rechts links
(Betrachte das Vorzeichen der zweiten Ableitung: $+ - +$.)
Graph:



Aufgabe 6 Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$. Nullstellen der Ableitung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ oder $x = 5$.
Dies und die Randpunkte des Intervalls sind die kritischen Punkte.
Monotonie: $\nearrow\searrow\nearrow$.
Damit liegt in -2 ein lokales Minimum vor, in -1 ein lokales Maximum, in 5 ein lokales Minimum und in 7 ein lokales Maximum.
Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$f(-2) = -4, \qquad f(-1) = 6, \qquad f(5) = -102, \qquad f(7) = -58.$$

Damit ist das globale Minimum bei 5 und das globale Maximum bei -1.

Aufgabe 7

(a) $\int \frac{\cos x \cdot \ln(\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x \qquad t = \sin x,\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$
$= \int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln^2 t + C = \frac{1}{2}\ln^2(\sin x) + C.$

(b) Die Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{x-3}{x(x+2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{2}}{x+2}.$$

Damit ist $\int \frac{x-3}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|x+2| + C.$

Aufgabe 8 (Differentialgleichungen)

(a) Variablentrennung: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2+C}.$
Einsetzen der Bedingung $y(0) = 1$ führt zu $C = -1$. Also ist die gesuchte Lösung

$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 - 1}.$$

(b) Lösung der homogenen Gleichung $y' = \frac{y}{x}$ durch Variablentrennung:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + \tilde{c} \Leftrightarrow y = c \cdot x.$$

Variation der Konstanten: Ansatz $y(x) = c(x) \cdot x,\ y'(x) = c'(x) \cdot x + c(x)$.
Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$c'(x) \cdot x = x + 3 \Leftrightarrow c'(x) = 1 + \frac{3}{x} \Leftrightarrow c(x) = x + 3\ln|x| + K.$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y(x) = (x + 3\ln|x| + K)x.$$

Einsetzen der Bedingung $y(1) = 1$ führt zu $K = 0$. Also ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = (x + 3\ln|x|)x = x^2 + 3x\ln|x|.$$

Bemerkung: Die Differentialgleichung ist für $x = 0$ nicht definiert. Wir können sie also auf den zwei Intervallen $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$ getrennt betrachten. Der Anfangswert liegt im zweiten Intervall, also ist nur der Teil der Lösung auf $]0, \infty[$ für uns interessant, und dort ist $|x| = x$. Also:

$$y(x) = x^2 + 3x\ln x.$$