# 4 Reihen

## 4.1 Beispiele von Reihen

**Bemerkung (Folgen – Reihen).**

1. Folgen und ihre Konvergenz lassen sich in beliebigen metrischen Räumen definieren und untersuchen und sind unabhängig von einer algebraischen Verknüpfung. Dies ist die Stärke des Konzepts der Folgen, bedingt auch aber eine gewisse Schwäche.

2. Hat man eine algebraische Verknüpfung, etwa eine Addition, kann man Folgen leicht **gliedweise** verknüpfen:

$$(a_n)_n + (b_n)_n := (a_n + b_n)_n.$$

Einige andere *wichtige* algebraische Verknüpfungen lassen sich besser mit **unendlichen Reihen** formulieren.

Wir beginnen mit einigen einführenden Beispielen.

---

**Bezeichnung (Grenzwert der Partialsummen).**

Zu einer Zahlenfolge $(a_n)_n$ bildet man die Folge der Partialsummen $(\sum_{\nu=1}^{n})_n a_\nu$.

Wenn diese konvergiert, so bezeichnet man den **Grenzwert der Partialsummen** mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu.$$

---

**Beispiel: (geometrische Reihe).**

Nach Beispiel 2.1.17 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \quad \text{für } |x| < 1.$$

In einer vollständig normierten Algebra wendet man die geometrische Reihe **andersherum** an. Die Reihe konvergiert für $\|x\| < 1$ und ergibt die sonst schwer zugängliche Inverse:

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } \|x\| < 1.$$

**Ziel: Konvergenzkriterien** für Reihen, deren Grenzwert man nicht ohne weiteres angeben kann!

---

**Beispiel (Exponentialreihe).**

Die reelle Exponentialfunktion hat die Reihenentwicklung (vgl. Beispiel 3.1.40)

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Die Funktionalgleichung der Exponential-Funktion sollte sich aus dieser Reihenentwicklung herleiten lassen:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) &= (\exp x)(\exp y)\\ &= \exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.\end{aligned}$$

**Frage:** Kann man obige Funktionalgleichung auch durch Multiplikation und Umformung der Reihen erhalten?

---

**Beispiele 4.1.1 (Funktionalgleichung:** exp**-Reihe)**

**Wir werden im Beispiel 4.4.30 noch begründen, warum die folgenden Umformungen erlaubt sind:**

$$\begin{aligned}(\exp x)(\exp y) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\Big) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,m!}\, x^n y^m\end{aligned}$$

Faßt man die Potenzen mit gleichem $k := m+n$ zusammen, so erhält man mit der binomischen Formel 1.2.18:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,nm!}\, x^n y^m &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!}\, x^l y^{k-l}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y).\end{aligned}$$

---

**Bemerkung.** Die Funktionalgleichung der Exponentialreihe 4.1.1 gilt allgemeiner in **vollständig normierten, kommutativen Algebren**. Man kann z. B
:

- komplexe Zahlen und komplexe Funktionen
- kommutierende Matrizen

in die Exponentialreihe einsetzen

**Ausblick.** Was passiert, wenn man den Differentialoperator in die Reihe einsetzt?

Man vergleiche mit der Taylorformel:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k (D^k f)(x)}{k!} + R_n(x,h)$$

In der Funktionalanalysis untersucht man die Exponentialfunktion von Operatoren.

---

**Beispiele 4.1.2 (Reihenentwicklung $\exp z$)**

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ folgt aus Beispiel 4.1.1

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^k}{k!} &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}\Big) \\ &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big) \\ &= (\exp x)(\cos y + i \sin y).\end{aligned}$$

Vergleicht man die rechte Seite mit der Potenzreihen von cos und sin 3.3.8 und der Eulerschen Definition 3.4.38 der **komplexe Exponentialfunktion**, so erhält man die komplexe Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

---

**Beispiele 4.1.3 (Umordnung: alternierende Reihe)**

1. Nach Beispiel 3.1.45 gilt

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

2. Die ungeraden Partialsummen sind streng monoton fallend:

$$\log 2 < 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) \dots < \frac{5}{6}.$$

3. Man sortiere die Terme um: **immer zwei positive Terme und dann einen negativen.** Die $3n$-ten Partialsummen der umgeordneten Reihe sind streng monoton wachsend:

$$\frac{5}{6} < \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

Die umgeordnete Reihe **konvergiert nicht gegen** $\log 2$ (!)

4. Beh.: Die umgeordnete Reihe konvergiert gegen $\frac{3}{2}\log 2$.

$$\begin{aligned} s = {} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ + \ \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \ + \dots \\ = {} & \big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\big) + \big(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\big) + \dots \\ \frac{s}{2} = {} & \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\big) \qquad\qquad + \big(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\big) + \dots \end{aligned}$$

Addiert man die Reihen für $s$ und $\frac{s}{2}$, so folgt

$$\frac{3}{2}s = \big(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\big) + \big(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\big) + \dots$$

Nach dem Leibniz-Kriterium 4.3.10 konvergiert die Reihe

$$\frac{3}{2}s = \big(1 + \frac{1}{3}\big) - \frac{1}{2} + \big(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\big) - \frac{1}{4} + \dots$$

Da $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{4n-1} \to 0$, konvergiert die Reihe auch ohne die Klammern.

---

## 4.2 Reihe und Summe einer Reihe

**Bemerkung (Reihen in normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen).**

Die **elementare** Theorie der unendlichen Reihen erfordert für Vektorräume den gleichen Aufwand wie für Reihen mit komplexen Summanden. Nur für reelle Reihen untersuchen wir zuvor zwei Sonderfälle:

- Reihen mit nichtnegativen Summanden,
- alternierende Reihen.

Wir erklären daher Reihen und die Konvergenz von Reihen gleich für vollständig normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume $V$. Der Körper $\mathbb{K}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Insbesondere interessieren uns die Banachräume $\mathcal{B}(M, V)$ und der Unterraum $\mathcal{C}_b(X, V)$.

---

**Definition 4.2.1 (Reihen und Summen von Reihen)**

1. *Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zu einer Folge $(a_n)_n$ in $V$ bilde man die Folge $(s_n)_n$ der **Partialsummen:***

$$s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

*Die Folge der Partialsummen heißt* ***unendliche Reihe*** *oder kurz* ***Reihe*** *mit den Summanden* $a_n$*. Kurzbezeichnung:*

$$\sum_n a_n := (s_n)_n .$$

2. *Es sei* $V$ *ein normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. Wenn die Folge* $(s_n)_n$ *der Partialsummen konvergiert, so heißt die Reihe* ***konvergent****. Den Grenzwert nennt man die* ***Summe der Reihe*** *und bezeichnet ihn mit:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n .$$

---

**Bemerkung (andere Bezeichnung von Reihen).**

In der **hergebrachten** Schreibweise verwendet man für die Reihe und ihren Grenzwert **dasselbe** Symbol. Man schreibt:

$$\text{Reihe:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad \text{Summe der Reihe:} \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

wobei letzteres als Abkürzung für

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

verstanden wird. Dann wird $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wie eine Zahl verwendet.

Die Lehrbücher handhaben die Bezeichnung für Reihen uneinheitlich. Wir verwenden, wie einige andere Texte, einen **Kompromiß**, der sich an der historischen Bezeichnung orientiert, aber die Doppeldeutigkeit vermeidet.

---

**Beispiel (Reihe – Summe einer Reihe).**

1. Die **geometrische Reihe** ist die Reihe zu der Folge der Potenzen $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $Z \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n$$

ist als Folge der Partialsummen für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert.

2. Die **Summe der geometrischen Reihe** existiert nur für $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} ,$$

obwohl die rechte Seite $1/(1 - z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ erklärt ist.

Die Folge $(z^{n+1})_n$ konvergiert gegen 0 für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| \geqslant 1$.

---

**Bemerkung. (Folgen – Reihen).**

1. Jede Folge in einem Vektorraum kann als Reihe aufgefaßt werden. Vereinbart man $b_0 = 0$, so gilt:
$$(b_n)_n = \sum_n (b_n - b_{n-1}).$$
In einem normierten Vektorraum ist die Untersuchung von Folgen und Reihen äquivalent. Reihen treten aber vielfach in natürlicher Weise auf und viele Aussagen über Folgen von Partialsummen lassen sich mit Reihen leichter formulieren.

2. Man kann von **den** Summanden einer Reihe $\sum_n a_n$ sprechen:
$$a_n = s_n - s_{n-1} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu.$$
Man beachte die Konvention 1.2.1(3.) für die leere Summe.

---

**Bemerkung (Indizierung: Folge der Partialsummen).**
Wir indizieren die Folge der Partialsummen vorerst ab 1:
$$\sum_n a_n := s_1, s_2, s_3, \dots = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Der Koeffizient gibt die Anzahl der verwendeten Summanden an:
$$s_k = a_1 + \dots a_k.$$
Bei Potenzreihen werden wir aber die Partialsummen ab 0 indizieren:
$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n := s_0, s_1, s_2, \dots = (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$
Der Koeffizient gibt dann den Grad des Polynoms an:
$$s_k := a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_k z^k.$$
Die Nummerierung ändert natürlich nicht an den Resultaten.

---

**Bemerkung. (Reihe – Reihenfolge – Teilfolge).**

1. Wenn man die Reihenfolge der Summanden ändert, entsteht eine **andere** Reihe.

Das Beispiel 4.1.3 zeigt, daß die Umordnung einer konvergenten Reihe eventuell nicht mehr oder gegen einen anderen Wert konvergiert.

2. Wenn die Reihe $\sum_n a_n$ zu einer Folge $(a_n)_n$ konvergiert, muß die Reihe $\sum_k a_{n_k}$ zu einer Teilfolge $(a_{n_k})_k$ nicht notwendig auch auch konvergieren:
$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \quad \text{aber} \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots = \infty.$$

3. Wir charakterisieren später die reellen oder komplexen Reihen, deren Grenzwert sich bei Umordnungen nicht ändert (**absolut konvergente Reihen**). Für solche Reihen konvergieren dann auch die Summen über Teilfolgen.

---

**Feststellung 4.2.2 (Index-Operationen bei Reihen)**

1. *Für eine Folge* $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ *läuft die Summation ab* $n_0 \in \mathbb{Z}$*:*

$$\textstyle\sum_{n\geqslant n_0} a_n = \left(\displaystyle\sum_{\nu=n_0}^{n_0-1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. *Die Bezeichnung für den Summationsindex ist beliebig wählbar:*

$$\textstyle\sum_n a_n = \sum_k a_k.$$

*Man kann den Summationsindex verschieben:*

$$\textstyle\sum_n a_n = \sum_{n\geqslant k+1} a_{n-k}$$

3. *Entsprechende Regeln gelten für die Summe einer konvergenten Reihe.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{n-n_0}.$$

---

4. *Wenn c eine Konstante ist, so bezeichne*

$$c + \textstyle\sum_n a_n := \big(c + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\big)_n$$

*Die Konstante c wird zu jeder Partialsumme addiert.*

5. *In diesem Sinne sind die beiden Folgen gleich:*

$$a_1,\, a_1 + a_2,\, a_1 + a_2 + \textstyle\sum_{n\geqslant 3} a_n = \sum_n a_n.$$

6. *In der* ***Folge der Partialsummen*** *kann man endlich viele Glieder weglassen, ohne das Konvergenzverhalten und den Grenzwert zu ändern.*

*In diesem Sinne können sich die Reihen*

$$a_1 + \ldots a_{n_0} + \textstyle\sum_{n\geqslant n_0+1} a_n \quad \text{und} \quad \sum_n a_n$$

*gegenseitig ersetzen.*

7. *Wenn man am Anfang einer konvergenten Reihe endlich viele Summanden wegläßt, entsteht wieder eine konvergente Reihe. Für* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=n_0+1}^{n} a_\nu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n_0} a_\nu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n.\end{aligned}$$

8. *Entsprechend gilt für die Summe einer konvergenten Reihe:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \quad \textit{für } n_0 \in \mathbb{N}.$$

---

**Bemerkung 4.2.3 (notwendige Konvergenzbed.)**

Es sei $V$ ein normierter Raum und $(a_n)_n$ eine Folge in $V$.

Wenn die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert, dann gilt:

1. Die Summanden bilden eine Nullfolge: $a_n \to 0$.

   *Diese Bedingung ist notwendig aber* ***nicht*** *hinreichend für die Konvergenz der Reihe.*

2. Die **Reihenreste** bilden eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=n} \infty a_\nu = 0.$$

3. Die Reihe erfüllt die **Cauchy-Bedingung**:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N} \; :$$
$$n \geqslant m \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \| \sum_{\nu=m}^{n} a_\nu \| < \varepsilon.$$

---

**Beweis (notwendige Konvergenzbedingungen).**

1. Es sei $(s_n)_n$ die Folge der Partialsummen.

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} s_n & \to s \\ s_{n+1} & \to s \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_n = s_{n+1} - s_n \to 0.$$

2. Es gilt:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = s_n - s_{n-1} \to 0.$$

3. Die konvergente Folge $(s_n)_n$ erfüllt die Cauchy-Bedingung. Nun gilt

$$\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu = s_n - s_{m-1} \quad \text{für } n \geqslant m.$$

   Die Bedingung (3.) besagt also gerade, daß $(s_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

---

**Bemerkung (notwendige Konvergenzbedingung.**

Die Bedingung 4.2.3 (1.) ist nur notwendig und **nicht hinreichend** für die Konvergenz der Reihe!

Wenn $V$ vollständig ist, sind 4.2.3 (2,) und die Cauchy-Bedingung (3.) auch hinreichend.

**Satz 4.2.4 (Cauchy-Bedingung für Reihen)**

*Es sei $V$ ein vollständig normierte Raum und $(a_n)_n$ eine Folge in $V$.*

*Die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen die Cauchy-Bedingung erfüllt:*

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}\ : \\ &\qquad\qquad n \geqslant m \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

---

**Bemerkung (Cauchy-Bedingung für Reihen).**

Man kann die Cauchybedingung auch so formulieren:

Es sei $V$ ein vollständig normierte Raum und $(a_n)_n$ eine Folge in $V$.

Die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\|\sum_{\nu=n_0}^{n} a_\nu\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geqslant n_0.$$

---

**Satz 4.2.5 (Verdichtungssatz)**

1. *Eine Bildung einer Teilfolge $(s_{n_k})_k$ der **Folge der Partialsummen** $(s_n)_n$ bedeutet, daß man in der Reihe die entsprechenden Summanden klammert:*

   $$\begin{aligned}(s_{n_k})_k &= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \displaystyle\sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} a_\nu \\ &= (a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \ldots\end{aligned}$$

   *Dabei ist $n_0 = 0$ gesetzt.*

2. *Wenn die ursprüngliche Reihe **konvergiert**, dann konvergiert auch die **geklammerte** Reihe gegen den gleichen Grenzwert:*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} a_\nu$$

**Bemerkung.** Aus der Konvergenz der geklammerten Reihe folgt i.a. **nicht** die Konvergenz der Reihe ohne Klammern!

**Beispiel.**

$$\sum_n (1-1)$$

konvergiert gegen 0, aber die Reihe

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1}$$

divergiert.

**Lemma 4.2.6 (Stetige Verknüpfungen)**

1. *Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.*
   (a) *Die **Addition** $+ : V \times V \to V$ ist gleichmäßig stetig:*

   $$\|(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\| \leqslant \|x_1-x_2\| + \|y_1+y_2\|$$

   *für $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2) \in V \times V$.*

   (b) *Die **Multiplikation** $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ ist stetig und gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen*

   $$\begin{aligned}\|\alpha x - \beta y\| &= \|(\alpha-\beta)x + \alpha(x-y) - (\alpha-\beta)(x-y)\| \\ &\leqslant |\alpha-\beta|\|x\| + |\alpha|\|x-y\| + |\alpha-\beta|\|x-y\|.\end{aligned}$$

2. *In einer **normierten Algebra** ist die Multiplikation stetig und gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen:*

   $$\begin{aligned}\|x_1y_1 - x_2y_2\| \leqslant{}& \|x_1-x_2\|\|y_1\| + \|x_1\|\|y_1-y_2\| \\ &+ \|x_1-x_2\|\|y_1-y_2\|.\end{aligned}$$

**Bemerkung (Rechenregeln für Grenzwerte)**

Die Rechenregeln 2.1.15 zu Summe (1.) und Produkt(2:) konvergenter Folgen gelten allgemeiner für die Summe in Normierten Räumen und das Produkt $\mathbb{K} \times V \to V$ und auch für das Produkt in normierten Algebren.

**Feststellung 4.2.7 ((Rechenregeln für Grenzwerte)**

*Es seien $V$ ein normierte $\mathbb{K}$-Vektorraum, $(a_n)$, $(b_n)$ konvergente Folgen in $V$ und $(\lambda_n)_n$ eine konvergente Folge in $\mathbb{K}$.*

*Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ folgt dann:*

*1.* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

*2.* $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n \cdot a_n) = \lambda \cdot a$.

*Ist $V$ eine normierte Algebra, so gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

---

**Bemerkung.** Die Grenzwertregel für das Produkt gilt für beschränkte bilineare Abbildungen von normierten Räumen

**Bezeichnung 4.2.8 (beschränkte bilineare Abbildung)** Es seien $U, V, W$ normierte Räume. Eine bilineare Abbildung

$$b : U \times V \to W$$

heißt **beschränkt**, wenn gilt:

$$\|b(u,v)\| \leqslant C\|u\|\|v\| \quad \text{für } u \in U,\ v \in V.$$

**Beispiel:** Matrix $\cdot$ Vektor, Inneres Produkt, Kreuzprodukt.

**Feststellung.** Beschränkte bilineare Abbildungen sind stetig und gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen:

$$\begin{aligned}\|b(u_1,v_1) - b(u_2,v_2)\| \leqslant C\big(&\|u_1 - u_2\|\|v_1\| + \|u_1\|\|v_1 - v_2\| \\ &+ \|u_1 - u_2\|\|v_1 - v_2\|\big)\end{aligned}$$

für $u_1,\ u_2 \in U,\ v_1,\ v_2 \in V$.

---

**Bemerkung (beschränkte multilineare Abbildungen).**

In verallgemeinerung des Produktes betrachtet man beschränkte multilineare Abbildungen, wie

- Determinante,
- Spatprodukt im dreidimensionalen euklidischen Raum.

Für diese gelten die gleichen Konvergenzregeln wie für Produkte von Zahlen mit einer festen Anzahl von Faktoren.

Wir werden dies später an passender Stelle formulieren.

---

**Feststellung 4.2.9 (Addition von Reihen)**

*Für Reihen in einen normierten Raum gilt:*

1. *Man bildet die* ***Summe zweier Reihen*** *durch Addition der entsprechenden Summanden:*

$$\sum_n a_n + \sum_n b_n := \sum_n (a_n + b_n).$$

*Man beachte die Bindung:*

$$\sum_n (a_n + b_n) \quad aber \quad \sum_n a_n + c = c + \sum_n a_n.$$

2. *Für die Summe zweier konvergenter Reihen gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

*Aus der Konvergenz der rechten Seite kann man* ***nicht*** *auf die Konvergenz der Summanden schließen!*

---

**Feststellung 4.2.10 (Vielfaches von Reihen)**
*Für Reihen in einen normierten Raum gilt:*

1. *Man bildet das* ***Vielfache*** *einer Reihe, indem man jeden Summanden multipliziert. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ sei*

$$\lambda \cdot \sum_n a_n := \sum_n \lambda \cdot a_n.$$

Allgemeiner verwenden wir diese Bezeichnung für bilineare Abbildungen. Die **Verknüpfung** der Terme muß erklärt sein und für endliche Summen muß das **Distributivgesetz** gelten.

2. *Für eine konvergente Reihe in $V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n$$

Die entsprechende Regel gilt auch in normierten Algebren und allgemeiner für beschränkte bilineare Abbildungen.

---

**Beispiele 4.2.11 (Produkt und Doppelsumme)**
Für zwei konvergente Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ in $\mathbb{K}$ folgt:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \sum_{m=1}^{\infty} b_m\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m\Big)$$

Man kann also auf die Klammern verzichten und die **Doppelsumme** definieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m := \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m\Big)$$

Die Anwendung der Regel auf den zweiten Faktor ergibt:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big) b_m = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m$$

In diesem Fall kann man die Summationsreihenfolge vertauschen!

---

**Bezeichnung 4.2.12 (unendliche Doppelreihen)**

Für eine doppelt indizierte Folge $(a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$, für die die Summen der Reihen

$$A_m := \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

existieren, bilde man die Reihe

$$\textstyle\sum_m A_m.$$

Wenn diese Reihe konvergiert, hat man die Summe der Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} := \sum_{m=1}^{\infty} A_m = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\Big)$$

**Bemerkung.** Bei Doppelreihen darf man i.a. die Reihenfolge der Summation **nicht** vertauschen!

---

## 4.3 Reelle Reihen

### 4.3.1 Reihen mit nichtnegativen Summanden

**Bemerkung (nichtnegative Summanden).**

Es sei $\sum_n a_n$ eine reelle Reihe mit **nichtnegativen** Summanden $a_n \geqslant 0$. Dann ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend.

In Satz 2.2.11 hatten wir gezeigt:

***Die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}$, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.***

---

**Bemerkung.** Nach Feststellung 2.1.19 folgt für eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Summanden $a_n \geqslant 0$:

$$\sum_n a_n \quad \text{konvergent} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Das Beispiel der harmonischen Reihe $\sum_n \frac{1}{n}$ zeigt, daß die Umkehrung nicht gilt. (vgl. 1.4.11 und 1.4.12):

---

**Bezeichnung 4.3.1 (Uneigentlich konvergente Reihe)**

Es sei $\sum_n a_n$ eine Reihe mit **nichtnegativen** Summanden $a_n \geqslant 0$. Dann ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend.

1. Entsprechend der Definition 2.1.22 bezeichnen wir auch bei **uneigentlicher** Konvergenz der Partialsummen den Grenzwert mit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to \infty.$$

2. Im Fall eigentlicher Konvergenz schreiben wir zur Betonung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

---

**Feststellung 4.3.2 (Vergleichskriterium)**

*Es seien $(a_n)$ und $(b_n)$ **nichtnegative** Folgen in $\mathbb{R}$, so daß*

$$a_n \leqslant b_n \quad \textit{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

*Dann gilt:*

1. *Konvergiert die Reihe $\sum_n b_n$, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_n a_n$*
2. *Divergiert die Reihe $\sum_n a_n$, dann divergiert auch die Reihe $\sum_n b_n$.*

**Bezeichnung (Minorante – Majorante).**

Man nennt im obigen Fall 4.3.2

- die Reihe $\sum_n a_n$ eine **Minorante** der Reihe $\sum_n b_n$,
- die Reihe $\sum_n b_n$ eine **Majorante** der Reihe $\sum_n a_n$.

**Bemerkung (zum Vergleichskriterium).**

Um das Vergleichskriterium anzuwenden, brauch man einen *Vorrat* von konvergenten bzw. divergenten Reihen mit nichtnegativen Summanden.

Man versucht dann, unter den bereits bekannten Reihen eine Vergleichsreihe zu finden.

Mit einigen häufiger verwendeten Vergleichsreihen erhält man aus dem Vergleichskriterium die folgenden Kriterien:

- Verdichtungkriterium 4.3.3,
- Wurzelkriterium 4.3.6,
- Quotiententenkriterium 4.3.7

Man unterscheide den Verdichtungs**satz** 4.2.5 und das Verdichtungs**kriterium** 4.3.3

**Satz 4.3.3 (Verdichtungskriterium)**

*Es sei $(a_n)_n$ eine nichtnegative monoton fallende Folge:*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant 0$$

*Die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert genau dann, wenn die **verdichtete Reihe***

$$\textstyle\sum_{k\geqslant 0} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8$$

*konvergiert:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty.$$

**Beweis (Verdichtungskriterium).**

$$s_n := \sum_{\nu_1}^{n} a_\nu, \qquad t_k := \sum_{\varkappa=0}^{k} 2^\varkappa a_{2^\varkappa}.$$

Wir schätzen einzelne Partialsummen gegeneinander ab:

$$\begin{aligned}
s_{2^{k+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + \dots (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\
&\leqslant a_1 + 2a_2 + \dots 2^k a_{2^k} = t_k \\
s_{2^k} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\
&\geqslant \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}t_k.
\end{aligned}$$

Beide Folgen von Partialsummen sind monoton wachsend. Da

$$s_{2^{k+1}-1} \leqslant t_k \leqslant 2s_{2^k},$$

sind die Folgen entweder beide beschränkt oder beide unbeschränkt.

---

**Beispiele 4.3.4 (Verdichtungskriterium)**
Die Reihe

$$\sum_n \frac{1}{n^{1+s}}$$

konvergiert für $s > 0$ und divergiert für $s \leqslant 0$.

**Beweis (Beispiel:Verdichtungskriterium).** Für $s = 0$ ist die Reihe divergent (vgl. harmonische Reihe 1.4.11 und 1.4.12) Aus dem Vergleichskriterium 4.3.2 folgt nun

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+s}} \quad \text{für } s \leqslant 0.$$

Im Fall $s > 0$ wende man den Verdichtungskriterium 4.3.3 an. Für die Partialsummen der verdichteten Reihe gilt nach 2.1.17:

$$t_k := \sum_{\varkappa=0}^{k} 2^{\varkappa} \frac{1}{(2^{\varkappa})^{1+s}} \leqslant \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^s}\right)^{\varkappa} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} < \infty.$$

---

**Beispiele 4.3.5 (Verdichtungskriterium)**
Die Reihe

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\log n)^{1+s}}$$

konvergiert für $s > 0$ und divergiert für $s \leqslant 0$.

**Beweis (Beispiel:Verdichtungskriterium).**
Da die Logarithmusfunktion für $n > 1$ positiv und monoton wachsend ist, bilden die Summanden eine positive, monoton fallende Nullfolge. Wir untersuchen die verdichtete Reihe:

$$\sum_{k\geqslant 1} 2^k \frac{1}{2^k(\log 2^k)^{1+s}} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(k \log 2)^{1+s}} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^{1+s}}.$$

Nach Beispiel 4.3.4 konvergiert die verdichtete Reihe für $s > 0$ und divergiert für $s \leqslant 0$.

Nach dem Verdichtungskriterium 4.3.3 verhält sich die ursprüngliche Reihe ebenso.

---

**Bemerkung.** Das Wurzelkriterium beruht auf einem Vergleich mit der geometrischen Reihe 2.1.17:

**Feststellung 4.3.6 (Wurzelkriterium)**
*Es sei $(a_n)_n$ eine nichtnegative, reelle Folge und*

$$w := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

*Dann gilt:*

1. *Wenn $w < 1$ ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.*
2. *Wenn $w > 1$ ist dann ist die Folge $(a_n)_n$* ***keine Nullfolge****. Die Reihe divergiert.*
3. *Für den Fall $w = 1$ gibt es sowohl Beispiele konvergenter Reihen als auch Beispiele divergenter Reihen.*

**Bemerkung.** Das Wurzelkriterium gilt sinngemäß, wenn fast alle Summanden nichtnegativ sind.

---

**Beweis (Wurzelkriterium).**
$\boxed{w < 1:}$ Für ein $q \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < q < 1$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sqrt[n]{a_n} < q \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0.$$

Dann gilt die Abschätzung

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = q^{n_0} \frac{1}{1-q} < \infty.$$

$\boxed{w > 1:}$ Wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, so gibt es eine Teilfolge

$$(a_{n_k})_k \quad \text{mit} \quad a_{n_k} > 1.$$

Nach Feststellung 2.1.19 ist die Reihe divergent.
$\boxed{w = 1:}$ Man betrachte die Beispiele (vgl. 1.4.13 und 1.4.12):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 \quad \text{aber} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

---

**Bemerkung.** Auch das Quotientenkriterium beruht auf einem Vergleich mit der geometrischen Reihe 2.1.17.

Das Quotientenkriterium ist oft leichter zu handhaben, ist aber **weniger streng** als das Wurzelkriterium.

**Feststellung 4.3.7 (Quotientenkriterium)**

*Es sei $(a_n)_n$ eine Folge positiver reeller Zahlen $a_n > 0$.*

*Für die Reihe $\sum_n a_n$ gilt:*

1. *Wenn* $q := \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *dann **konvergiert** die Reihe.*
2. *Wenn* $q := \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *dann ist die Folge $(a_n)_n$ **keine Nullfolge**. Die Reihe divergiert.*
3. *Für den Fall* $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *gibt es sowohl Beispiele konvergenter als auch Beispiele divergenter Reihen.*

---

**Beweis (Quotientenkriterium).**

1. Man wähle eine Zahl $\tilde{q} \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \tilde{q} < 1$. Es gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \tilde{q} \quad \text{für } n \geqslant n_0.$$
Induktiv folgt dann
$$a_{n_0+k} \leqslant \tilde{q}^k a_{n_0} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$
Es gilt die Abschätzung
$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu \leqslant \tilde{q}^{n_0} a_{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{q}^k = \tilde{q}^{n_0} a_{n_0} \frac{1}{1-\tilde{q}} < \infty.$$

---

2. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{für } n \geqslant n_0.$$
Also ist $a_n \geqslant a_{n_0} > 0$ für $n \geqslant n_0$. Nach Feststellung 2.1.19 ist die Reihe divergent.
3. Man betrachte die Beispiele (vgl. 1.4.13 und 1.4.12):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 \quad \text{aber} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

---

**Beispiele 4.3.8 (Wurzelkriterium – Quotientenkrit.)**

Die Reihe
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

ist als Summe zweier geometrischer Reihen sicher konvergent.

Das Quotientenkriterium versagt aber:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0,$$

Das Wurzelkriterium *erkennt* die Konvergenz der Reihe:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\frac{1}{2k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

---

**Bemerkung (Wurzelkriterium – Quotientenkrit).**

Die folgenden Ungleichungen zeigen, daß das Wurzelkriterium strenger als das Quotientenkriterium ist.

Man kann sich auf den Fall positiver Summanden zurückziehen, denn verschwindende Summanden kann man weglassen, ohne die Konvergenz zu verändern.

**Lemma 4.3.9 (Wurzelkriterium – Quotientenkrit.)**

*Es sei $(a_n)$ eine Folge positiver, reeller Zahlen. Dann gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

---

**Beweis (Wurzelkriterium – Quotientenkrit).**

Wir zeigen die Ungleichung für den Limes superior.

Es sei $q := \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Wenn $q = \infty$ ist, ist nichts zu zeigen.

Es sei also $q < \infty$. Zu $\tilde{q} \in \mathbb{R}$ mit $q < \tilde{q}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \tilde{q} \quad \text{für } n \geqslant n_0.$$

Induktiv folgt

$$\begin{aligned} a_{n_0+k} &\leqslant \tilde{q}^k a_{n_0} && \text{für } k \in \mathbb{N}_0, \\ a_n &\leqslant \tilde{q}^n (\tilde{q}^{-n_0} a_{n_0}) && \text{für } n \geqslant n_0, \end{aligned}$$

und somit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \tilde{q}.$$

Da $\tilde{q} > q$ beliebig war, folgt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant q$.

Die Ungleichung für Limes inferior folgt analog.

---

### 4.3.2 Leibniz-Kriterium

**Bezeichnung (alternierende Reihen)**

Eine Reihe $\sum_n a_n$ deren Summanden abwechselnd positiv und negativ sind, heißt eine **alternierende** Reihe.

Wie wir gleich sehen, konvergieren solche Reihen nach dem **Leibniz-Kriterium** sicher, wenn $(|a_n|)_n$ eine monotone Nullfolge ist.

Eine solche alternierende *Leibniz-Reihe*, die mit einem postiven Summanden beginnt, hat die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

mit $a_0 \geqslant a_1 \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \to 0$.

(Für eine komplexe Form des Leibnitskriteriums vgl. 4.4.14)

---

**Beispiel (alternierende Reihen).**

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \qquad \text{für } 0 \leqslant x < 1.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad \text{für } 0 \leqslant x < 1.$$

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

$$\exp(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} \qquad \text{für } x > 0.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

---

**Satz 4.3.10 (Leibniz-Kriterium)**

*Es sei $(a_n)_n$ eine **monoton fallende** Folge in $\mathbb{R}$. Die alternierende Reihe*

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$$

***konvergier**t genau dann, wenn die Summanden eine **Nullfolge** bilden.*

1. *Die Partialsummen $s_{2n+1}$ sind nichtnegativ und monoton wachsend.*
2. *Die Partialsummen $s_{2n}$ sind nichtnegativ und monoton fallend.*

*3. Es sei* $s := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$*. Dann gilt für* $n \in \mathbb{N}_0$*:*

$$\begin{aligned} 0 \leqslant s - s_{2n+1} &\leqslant a_{2n+2}, \\ 0 \leqslant s_{2n} - s \quad &\leqslant a_{2n+1}, \\ |s - s_n| \quad &\leqslant a_{n+1}. \end{aligned}$$

---

**Beweis (Leibniz-Kriterium).**

$\boxed{\Rightarrow:}$ klar.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Ofensichtlich gilt: $(-1)^n a_n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \to 0$.

Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:

$$\begin{aligned} s_{2n+3} &= (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geqslant s_{2n+1} \\ s_{2n+2} &= a_0 - (a_1 - a_2) - \cdots - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leqslant s_{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll} (1.) & 0 & \leqslant s_{2n+1} & \leqslant s_{2n+3} & \\ (2.) & a_0 & \geqslant s_{2n} & \geqslant s_{2n+2} & \\ \Rightarrow & 0 & \leqslant s_{2n+1} & \leqslant s_{2n+1} + a_{2n} = s_{2n+2} \leqslant a_0. & \end{array}$$

Die monotonen beschränkten Folgen $(s_{2n+1})_n$ und $(s_{2n})_n$ konvergieren und haben die gleichen Grenzwerte, da

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

3. Aus der Monotonie der Partialsummen erhält man:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant s - s_{2n+1} &\leqslant s_{2n+2} - s_{2n+1} = a_{2n+2}, \\ 0 \leqslant s_{2n} - s \quad &\leqslant s_{2n} - s_{2n+1} \quad = a_{2n+1}. \end{aligned}$$

Den Unterschied zwischen der Summe $s$ der Reihe und einer Partialsumme $s_n$ kann man nun durch den ersten weggelassenen Summanden abschätzen:

$$|s - s_n| \leqslant a_{n+1}.$$

---

**Beispiel (Leibniz-Kriterium).**

1. Alternierende harmonische Reihe (vgl. 3.1.45)

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Man beachte, daß die harmonische Reihe divergiert (vgl. 1.4.11 und 1.4.12):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

2. Aus der Taylor-Reihe des arctan erhält man die alternierende Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

---

### 4.3.3 Absolut konvergente Reihen

**Bezeichnung 4.3.11 (absolutkonvergente Reihe)**

1. Eine Reihe $\sum_n a_n$ mit reellen oder komplexen Summanden $a_n \in \mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

2. Es sei $(f_n)_n$ eine Folge von rellen oder komplexen Funktionen in $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$. Die **Funktionenreihe**

$$\textstyle\sum_n f_n$$

heißt **absolut konvergent**, wenn für alle $x \in M$ die Reihe $\sum_n f_n(x)$ absolut konvergent ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty \quad \text{für } x \in M.$$

---

**Satz 4.3.12 (absolut konvergente Reihe konvergiert)**

1. *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

2. *Für absolut konvergente Reihen gilt die **Dreiecksungleichung**:*

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

---

**Beweis.**

1. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

   Wir zeigen für die Reihe $\sum_n a_n$ die Cauchy-Bedingung 4.2.4.

   Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{\nu=m}^{n} |a_\nu| < \varepsilon \quad \text{für } n \geqslant m \geqslant n_0.$$

   Dann ist

$$|\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu| \leqslant \sum_{\nu=m}^{n} |a_\nu| < \varepsilon \quad \text{für } n \geqslant m \geqslant n_0.$$

2. Es reicht die Ungleichung für die Partialsummen zu zeigen, dann gilt sie auch für den Grenzwert. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$$

---

**Beispiele 4.3.13 (Binomialreihe)**

Man bildet für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ den Ausdruck "$\alpha$ **über** $n$":

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{für } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

und die **Binomialreihe**:

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{\alpha}{n} z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ handelt es sich um die binomische Formel $(1+z)^\alpha$.

Für Exponenten $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{\binom{\alpha}{n+1} z^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} z^n} = \frac{\alpha - n}{n+1} z \to z \quad \text{für } n \to \infty.$$

Für Exponenten $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ist die Binomialreihe nach dem Quotientenkriterium 4.3.7 für $|z| < 1$ **absolut** konvergent und **divergent** für $|z| > 1$.

---

**Bemerkung.** Für reelle und komplexe Folgen bildet man die Reihe der Beträge. Analog bildet man zu Folgen $(a_n)_n$ in einem normierten Raum die Reihe der Normen der Folgenglieder:

$$\textstyle\sum_n \|a_n\|.$$

Im Falle von Funktionen kann man nun einerseits punktweise den Betrag und andererseits die Norm der Funktionen bilden. Zur Unterscheidung führen wir noch einen Begriff ein:

**Bezeichnung 4.3.14 (normalkonvergente Reihe)**

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(a_n)_n$ eine Folge in $V$.

Die Reihe $\sum_n a_n$ heißt **normal konvergent**, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty.$$

---

**Bemerkung (absolut konverg. – normal konverg.).**

In den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ fallen die Begriffe **absolut konvergente** Reihe und **normal konvergente** Reihe zusammen.

Wenn keine Verwechselungsgefahr besteht, sagt man auch häufig absolut konvergent statt normal konvergent.

**Bemerkung.** Analog zum Satz 4.3.12 beweist man die Konvergenz normalkonvergenter Reihen:

**Satz 4.3.15 (normal konvergente Reihe konvergiert)**

*Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständig normierter Raum.*

1. *Eine normal konvergente Reihe ist konvergent.*
2. *Für normal konvergente Reihen gilt die* ***Dreiecksungleichung****:*

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty.$$

---

**Bezeichnung 4.3.16 (Umordnung einer Reihe)**

Unter einer Umordnung einer Reihe $\sum_n a_n$ versteht man eine bijektive Abbildung (Permutation von $\mathbb{N}$)

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

und die Bildung der **umgeordneten** Reihe

$$\textstyle\sum_k a_{\sigma(k)}$$

**Bemerkung 4.3.17** Nach dem Verdichtungssatz 4.2.5 kann man eine **konvergente** Reihe beliebig klammern, ohne die Summe der Reihe zu verändern:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} a_\nu,$$

wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}_0$ mit $n_0 = 0$ ist. Die **endlichen Summen** innerhalb der Klammern kann man beliebig umsortieren.

---

**Bemerkung.** Das Beispiel 4.1.3 zeigt, daß man in einer konvergenten Reihe im allgemeinen keine beliebigen Umordnungen vornehmen darf, ohne die Konvergenz der Reihe zu verändern.

Man nennt konvergente, nicht absolut konvergente Reihen zur Betonung auch **bedingt konvergente** Reihen.

Viel besser verhalten sich absolut konvergente Reihen.

- Wir werden zeigen, daß man mit absolut bzw. normal konvergenten Reihen weitgehend wie mit endlichen Summen umgehen kann.
- Ob eine Reihe absolut bzw. normal konvergent ist, läßt sich meist auch viel leichter nachprüfen. Man brauch ja nur die Beschränktheit der Reihe der Beträge bzw. Normen zu zeigen. Hiefür gibt es viel mehr und einfachere Kriterien.

---

**Satz 4.3.18 (Umordnung absolut konv. Reihen)**
*Es sei $V$ ein normierter Raum und $(a_n)_n$ eine Folge in $V$ und die Reihe $\sum_n a_n$ sei **konvergent**.*

*Wenn die Reihe $\sum_n a_n$ **normal konvergent** ist, dann können die Summanden $a_n$ beliebig umgeordnet werden:*

*Die umgeordnete Reihe ist immer konvergent und die Summe der Reihe ändert sich nicht.*

**Bemerkung.** Wenn $V$ endlichdimensional ist, gilt auch die Umkehrung:

*W*enn keine Umordnung der Reihe divergiert oder mit einem anderen Grenzwert konvergiert, dann ist die Reihe normal konvergent.

---

**Beweis (Umordnung von Reihen).**
Es sei $(a_{\sigma(k)})_k$ die umgeordnete Folge. Wir nennen

$$s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \quad \text{und} \quad t_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_{\sigma(\nu)}.$$

und zeigen $s_n - t_n \to 0$. Beide Reihen haben die gleiche Summe.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geqslant m \geqslant n_0$ gilt

$$\sum_{m}^{n} \|a_n\| < \varepsilon.$$

Setzt man

$$n_1 := \max\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(n_0)\},$$

so ist $n_1 \geqslant n_0$ und es gilt:

$$\{1, \ldots, n_0\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n_1)\}.$$

---

Für $n \geqslant n_1$ heben sich in der Differenz $s_n - t_n$ die Summanden $a_1, \ldots, a_{n_0}$ heraus:

$$s_n - t_n = \sum_{\nu=n_0+1}^{n} a_\nu - \sum_{\substack{\mu\in\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\} \\ \setminus\{1,\ldots,n_0\}}} a_\mu \ .$$

Setzt man

$$n_2 := \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\},$$

so ist $n_2 \geqslant n$ und es gilt:

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{1, \dots, n_0\} \subset \{n_0 + 1, \dots, n_2\},$$

$$\begin{aligned} \|s_n - t_n\| &= \Big\| \sum_{\nu=n_0+1}^{n} a_\nu - \sum_{\substack{\mu \in \{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\} \\ \setminus\{1,\dots,n_0\}}} a_\mu \Big\| \\ &\leqslant 2 \sum_{\nu=n_0+1}^{n_2} \|a_\nu\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

---

**Bezeichnung 4.3.19 (Teilreihen)**
Es sei $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Ist $\sum_n a_n$ eine Reihe, so heißt $\sum_k a_{n_k}$ eine **Teilreihe** der ursprünglichen Reihe.

**Feststellung 4.3.20 (Teilreihen)**
*Es sei $V$ ein normierter Raum und $(a_n)_n$ eine Folge in $V$.*
*Wenn die Reihe $\sum_n a_n$ **normal konvergent** ist, dann gilt*

1. *Jede Teilreihe $\sum_k a_{n_k}$ ist normal konvergent.*
2. *Für die Teilreihe gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{n_k}\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty.$$

---

**Beweis (Teilreihen).**
Die Reihe $\sum_n a_n$ sei normalkonvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty$$

Für $k \in \mathbb{N}$ folgt dann:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \|a_{n_\varkappa}\| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n_k} \|a_\nu\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty.$$

Für $k \to \infty$ folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{n_k}\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty.$$

---

**Korollar 4.3.21 (Addition von Teilreihen)**

*Es sei $V$ vollständig normiert. Die Reihe $\sum_n a_n$ sei **normal konvergent**.*

*Es seien $(n_k)_k$, $(m_l)_l$ zwei **disjunkte**, streng monoton wachsende Folgen in $\mathbb{N}$ mit*

$$\mathbb{N} = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_l \mid l \in \mathbb{N}\}$$

*ist. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Bemerkung.** Weitergehende Formen des Assoziativgesetzes formuliert man leichter mit Hilfe des Begriffs der **summierbaren Familie**.

Die Summanden einer normalkonvergenten Reihe bilden eine summierbare Familie.

---

**Beweis Summe von Teilreihen.**

Es sei $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} \|a_\nu\| < \varepsilon.$$

Dann ist

$$\|s - \sum_{\nu=1}^{n_0} a_\nu\| \leqslant \sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} \|a_\nu\| < \varepsilon.$$

Man setze

$$k_0 := \max\{k \mid n_k \leqslant n_0\}, \quad l_0 := \max\{l \mid m_l \leqslant n_0\}$$

Dann ist

$$\{n_1, \ldots, n_{k_0}\} \cup \{m_1, \ldots, m_{l_0}\} = \{1, \ldots, n_0\},$$
$$\sum_{\varkappa=1}^{k_0} a_{n_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{l_0} a_{m_\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n_0} a_\nu.$$

Für $k \geqslant k_0$ und $l \geqslant l_0$ folgt nun

$$\begin{aligned}
&\|s - \sum_{\varkappa=1}^{k} a_{n_\varkappa} - \sum_{\lambda=1}^{l} a_{m_\lambda}\| \\
&\quad \leqslant \|s - \sum_{\varkappa=1}^{k_0} a_{n_k} - \sum_{\lambda=1}^{l_0} a_{m_\lambda}\| + \|\sum_{\varkappa=k_0+1}^{k} a_{n_\varkappa}\| + \|\sum_{\lambda=l_0+1}^{l} a_{m_\lambda}\| \\
&\quad \leqslant \|s - \sum_{\nu=1}^{n_0} a_\nu\| + 2\,\|\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} a_\nu\| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Für die letzte Abschätzung vergleiche man 4.3.20 (2.).

Da $V$ vollständig ist, konvergieren die normalkonvergenten Reihen $\sum_k a_{n_k}$ und $\sum_l a_{m_l}$ (vgl. 4.3.20 (1.) und es folgt:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{m_l}.$$

---

**Satz 4.3.22 (absolut konvergente Doppelreihen)**

*Es sei $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ eine doppelt indizierte Folge.*

*Wenn die Doppelsumme der Beträge existiert:*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty,$$

*d.h., es konvergieren die Reihen:*

$$b_m := \sum_{n=1}^{\infty} < \infty \quad \textit{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m < \infty$$

*Dann konvergieren die beiden Doppelsummen und sind gleich:*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

---

**Beweis (absolut konvergente Doppelreihen).**

Es sei $B_m := \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$. Da $|B_m| \leqslant b_m$ und $\sum_{m=1}^{\infty} b_m < \infty$ existiert die Summe $s = \sum_{m=1}^{\infty} B_m$.

Da $|a_{m,n}| < b_m$ ist, existiert die Summe $A_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$.

Zu zeigen ist, daß die Reihe $\sum_n A_n$ konvergiert und die Summe $s$ hat.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß der Reihenrest

$$\sum_{\mu=m_0+1}^{\infty} b_m < \varepsilon.$$

Da $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{m_0} |a_{\mu,\nu}| = \sum_{\mu=1}^{m_0} b_\mu < \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{\mu=1}^{m_0}\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} |a_{\mu,\nu}| < \varepsilon.$$

Für $m \geqslant m_0$ und $n \geqslant n_0$ ist dann

$$\begin{aligned}
&|s - \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}| \\
&= |s - \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu} + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\mu,\nu}| \\
&\leqslant |s - \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu}| + \sum_{\mu=1}^{m_0}\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} |a_{\mu,\nu}| + \sum_{\mu=m_0+1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\mu,\nu}| \\
&\leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Für $n \geqslant n_0$ folgt nun

$$\begin{aligned}
|s - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu| &= |s - \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,\nu}| = |s - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{n} a_{m,\nu}| \\
&\leqslant |s - \sum_{m=1}^{m_0}\sum_{\nu=1}^{n} a_{m,\nu}| + |\sum_{m=m_0+1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{n} a_{m,\nu}| < 3\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

---

## 4.4 Funktionenreihen

**Bemerkung (Reihen von Funktn. und Abbildungen).**

Es seien $M$ eine Menge und $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Die Menge $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ der Funktionen auf $M$ und die Menge $\mathcal{F}(M, V)$ der Abbildungen von $M$ in $V$ ist ein Vektorraum.

Zu einer Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ bzw. $\mathcal{F}(M, V)$ bildet man die **Funktionenreihe** bzw. **Reihe von Abbildungen**

$$\textstyle\sum_n f_n$$

und untersucht die Konvergenz der Reihe.

Wie für Folgen von Abbildungen hat man auch für diese Reihen verschieden Konvergenzbegriffe.

Dies sind eigentlich für Reihen von Funktionen oder Abbildungen die gleichen Begriffe. Damit man dies sieht, führen wir diese Begriffe für beide Fälle einmal getrennt auf:

---

**Bezeichnung (Konvergenzbegriffe: Funktionenreihen).** 1. Für Funktionenreihen $\sum_n f_n$ in $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ unterscheiden wir:

> **punktweise konvergent**: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{K}$ für $x \in M$.
>
> **absolut konvergent**: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ für $x \in M$. Die Reihe konvergiert punktweise absolut (vgl. 4.3.11(2.))

**gleichmäßig konvergent**: Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet Konvergenz in der $\|\cdot\|_{\text{sup}}$-Norm (vgl. 2.8.10):

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{\nu=1}^{n} f_n\|_{sup} = 0.$$

Weiterhin unterscheidet man **absolut und gleichmäßig konvergente** und **gleichmäßig absolut konvergente** Funktionenreihen. Bsp.:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \quad \text{für } x \in [0,1).$$

---

2. Für Reihen $\sum_n f_n$ in dem normierten Raum der beschränkten Funktionen $(\mathcal{B}(M,\mathbb{K}), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ (vgl. 2.8.8) gibt es die Begriffe

**norm-konvergent = gleichmäßig konvergent**: die Konvergenz in dem normierten Raum $(\mathcal{B}(M,\mathbb{K}), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ (vgl. Definition 4.2.1 (2.)).

**normal konvergent**: $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\text{sup}} < \infty$ (vgl. Bezeichnung 4.3.14)

---

**Bemrerkung.** Die normale Konvergenz einer Reihe bietet ein gebräuchliches, handliches Kriterium, um die gleichmäßige Konvergenz nachzuweisen. (vgl. Feststellung 2.8.10).

**Satz 4.4.1 (normal konv. $\Rightarrow$ glm. konv.)**

*Es sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{B}(M,\mathbb{K})$.*

*Wenn die Reihe $\sum_n f_n$ normal konvergent ist:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\text{sup}} < \infty,$$

*dann ist die Reihe $\sum_n f_n$* ***gleichmäßig konvergent****.*

*Überdies ist die Reihe gleichmäßig absolut konvergent.*

---

**Bezeichnung (Konvergenzbegriffe: Abbildungsreihen).** Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

1. Für Reihen $\sum_n f_n$ in $\mathcal{F}(M,V)$ unterscheiden wir:

**punktweise konvergent**: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in V$ für $x \in M$.

(punktweise) **absolut konvergent**: $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\| < \infty$ für $x \in M$. Die Reihe ist punktweise normal konvergent in dem normierten Raum $V$ (vgl. 4.3.14)

**gleichmäßig konvergent**: Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet Konvergenz in der Supremums-Norm:

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in M} \|f(x)\| \quad \text{für } f \in \mathcal{B}(M, V).$$

Es gibt ein $f \in \mathcal{F}(M, V)$, so daß (vgl. 2.8.10):

$$\lim_{n \to \infty} \|f - \sum_{\nu=1}^{n} f_n\|_{sup} = 0.$$

Weiterhin unterscheidet man **absolut und gleichmäsig konvergente** Reihen und **gleichmäßig absolut konvergente** Reihen.

2. Für Reihen $\sum_n f_n$ in dem normierten Raum der beschränkten Abbildungen $(\mathcal{B}(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ (vgl. 2.8.8) gibt es die Begriffe

**norm-konvergent = gleichmäßig konvergent**: die Konvergenz in dem normierten Raum $(\mathcal{B}(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ (vgl. Definition 4.2.1 (2.)).

**normal konvergent**: $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\text{sup}} < \infty$ (vgl. Bezeichnung 4.3.14)

**Bemerkung 4.4.2 (normal konv $\Rightarrow$ glm. konv.)**

Der Satz 4.4.1 gilt analog für Reihen in $\mathcal{B}(M, V)$.

---

**Bezeichnung 4.4.3 (Konvergenzbereich)**

Zu einer Reihe $\sum_n f_n$ in $\mathcal{F}(M, V)$ bildet man den **Konvergenzbereich**

$$K := \{x \mid x \in M, \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in V\}$$

Die Einschränkungen $\sum_n f_n|K$ bilden eine punktweise konvergente Reihe.

**Bemerkung.** Analog bildet man zu einer Reihe von Abbildungen den Bereich, auf dem die Reihe absolut konvergiert. Das ist der Konvergenzbereich der Reihe $\sum_n \|f_n(.)\|$.

**Bemerkung (Inneres des Konvergenzbereichs).**

Wenn der Definitionsbereich $M$ ein metrischer Raum ist, bildet man das Innere des Konvergenzbereichs. Dies ist die größte offene Teilmenge von $M$, auf der die Reihe punktweise konvergiert.

---

**Bemerkung (lokal glm. konvergente Reihen).**

Wenn eine Reihe $\sum_n f_n$ in $\mathcal{F}(M, V)$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert, gibt es **keine gröste Teilmenge**, auf der die Reihe gleichmäßig konvergiert.

Häufig untersucht man in diesem Fall die Reihe auf **lokal gleichmäßige Konvergenz** (vgl. Bezeichnung 3.4.132.)

**Bezeichnung 4.4.4 (lokal normal konvergent)**

Eine Reihe $\sum_n f_n$ in $\mathcal{B}(M,V)$ heißt **lokal normal konvergent**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset M$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\sup,K} < \infty.$$

Dabei ist

$$\|f_n\|_{\sup,K} := \sup_{x\in K} \|f_n(x)\|.$$

---

**Beispiele 4.4.5 (geom. Reihe lokal glm. konvergent)**

1. Die geometrische Reihe $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ hat als Konvergenzbereich die offene Kreisscheibe $U(0,1)$ (vgl. 2.1.17).

2. Die geometrische Reihe ist auf $U(0,1)$ absolut konvergent, aber nicht gleichmäßig konvergent.

3. Die geometrische Reihe ist auf $U(0,1)$ nicht normal konvergent, denn ihre Summe ist unbeschränkt.

4. Die abgeschlossenen Kreischeiben mit Radien $0 < r < 1$ bilden eine offen-kompakte Auschöpfung (vgl. 3.4.134) von $U(0,1)$:

$$U(0,r_1)^- \subset U(0,r_2) \quad \text{für } 0 < r_1 < r_2.$$

Auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $U(0,r)^-$ mit $0 < r < 1$ ist die geometrische Reihe normal konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z^n\|_{\sup,U(0,r)^-} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} < \infty.$$

---

### 4.4.1 Potenzreihen

**Bemerkung.** Das Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe (vgl. Beispiel 4.4.5) ist typisch für Potenzreihen:

- Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist, *grob gesagt*, eine Kreisscheibe. Es gibt eine größte offene Kreisscheibe, auf der die Potenzreihe konvergiert. Dort konvergiert sie sogar absolut und lokal gleichmäßig.
- Auf dem Rand ihres Konvergenzbereiches zeigen Potenzreihen sehr unterschiedliches Konvergenzverhalten.

**Bezeichnung 4.4.6 (Potenzreihe)**

Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(c_n)_n$ eine Folge in $V$. Die Reihe

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{K}.$$

heißt eine **Potenzreihe in** $V$.

**Bezeichnung(dargestellte Funktion)**

Auf dem Konvergenzbereich $K$ einer Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ erzeugt die Summe der Reihe eine Abbildung:

$$f : K \to V \quad \text{mit} \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Man sagt, die Abbildung $f$ wird durch die Potenzreihe **dargestellt**.

**Bemerkung (Formale Potenzreihen).**

In der Algebra betrachtet man auch **formale Potenzreihen** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, ohne die Konvergenz zu betrachten.

Dabei handelt es sich eigentlich um Koeffizientenfolgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, für die man Summe und Produkt so erklärt, wie es für die Koeffizienten konvergenter Potenzreihen der Fall ist.

In dieser formalen Schreibweise sind die Rechenregeln analog zu den Regeln für Polynome.

---

**Bezeichnung 4.4.7 (Entwicklungspunkt)** Allgemeiner heißt eine Reihe der Form

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0} c_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in \mathbb{K}.$$

eine Potenzreihe um den **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{K}$.

**Bemerkung (Potenzreihe um eine Entwicklungspunkt).**

1. Für die Konvergenzbetrachtungen reicht es den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ zu untersuchen. Man setze $w := z - z_0$.

2. Eine **reelle Potenzreihe** hat die Form $\sum_{n\geqslant 0} a_n (x - x_0)^n$ mit $a_n$, $x_0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Der wichtigste Fall bilden die **komplexen Potenzreihen** $\sum_{n\geqslant 0} c_n (z - z_0)^n$ mit $z_0$, $c_n$, $z \in \mathbb{C}$.

   Die durch konvergente, komplexe Potenzreihen dargestellten Funktionen werden in der **Funktionentheorie** (4. Sem.) genauer untersucht.

---

**Satz 4.4.8 (Potenzreihen lokal normal konvergent)**
*Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(c_n)_n$ eine Folge in $V$. Wenn die Potenzreihe*

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \quad \textit{für } z \in \mathbb{K}.$$

*für ein $w \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ konvergiert, dann gilt:*

1. *Für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $0 \leqslant |z| < |w|$ ist die Reihe absolut konvergent:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| \cdot |z|^n < \infty.$$

2. *Für jedes $0 < r < |w|$ ist die Reihe normal konvergent auf der abgeschlossenen Kreisscheibe*

$$U(0,r)^- := \{z \mid |z| \leqslant r\}.$$

*Wenn $V$ vollständig ist, ist die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ gleichmäßig konvergent für $|z| \leqslant r$ (vgl. Satz 4.4.1).*

---

**Bemerkung.** Auffällig an dem folgenden Beweis des Satzes 4.4.8 ist, daß die Voraussetzung der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ nur benutzt wird, um auf die Beschränktheit der Folge $(c_n w^n)_n$ der Summanden zu schließen.

Beispiele zeigen, daß man i.a. keine schärferen Aussagen gewinnen kann. Insbesondere kann man i.a. keine Information über die Konvergenz in den Punkten $z$ mit $|z| = |w|$ erhalten.

---

**Beweis (Potenzreihen lokal normal konvergent).**
Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} w^n \in V$ konvergiert, bilden die Summanden eine Nullfolge (vgl. Feststellung 2.1.19) und sind folglich beschränkt.
Es gibt ein $0 \leqslant C < \infty$, so daß

$$\|c_n\| \cdot |w|^n \leqslant C \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $0 < r < |w|$ setze man $q := \frac{r}{|w|} < 1$. Für $|z| \leqslant r$ folgt

$$\|c_n z^n\| = \|c_n\| |w|^n \frac{|z|^n}{|w|^n} \leqslant C q^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Reihe der Supremumsnormen auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $U(0,r)^-$ gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n z^n\|_{\sup, U(0,r)^-} \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty.$$

---

**Bemerkung.** Mit demselben Beweis wie zu Satz 4.4.8 erhält man:

**Korollar 4.4.9**
*Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(c_n)_n$ eine Folge in $V$. Wenn für ein $\rho \in (0,\infty)$ die Folge $(c_n\rho^n)_n$ beschränkt ist, dann gilt:*

> *Für jedes $0 < r < \rho$ ist die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ normal konvergent auf der abgeschlossenen Kreisscheibe*
>
> $$U(0,r)^- := \{z \mid |z| \leqslant r\}.$$

*Wenn $V$ vollständig ist, ist die Reihe gleichmäßig konvergent.*

---

**Bezeichnung 4.4.10 (Konvergenzradius)**
Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(c_n)_n$ eine Folge in $V$. Zu der Potenzreihe

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{K}.$$

bilde man den **Konvergenzradius**:

$$R := \sup\{r \mid r \in [0,\infty) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| r^n < \infty\}$$

Die Umgebung $U(0,r) = \{z \mid z \in \mathbb{K},\ |z| < r\}$ heißt im Falle

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der **Konvergenzkreis**

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ das **Konvergenzintervall**

der Potenzreihe.

---

**Bemerkung.** Aus Korollar 4.4.9 erhält man sofort die folgenden äquivalenten Beschreibungen des Konvergenzradius einer Potenzreihe:

**Bemerkung 4.4.11 (Formel: Konvergenzradius)**
Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(c_n)_n$ eine Folge in $V$. Für den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ gilt:

$$\begin{aligned} R &= \sup\{r \mid r \in [0,\infty) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| r^n < \infty\}, \\ &= \sup\{r \mid r \in [0,\infty) \quad \text{und } (c_n r^n)_n \text{ Nullfolge}\}, \\ &= \sup\{r \mid r \in [0,\infty) \quad \text{und } (c_n r^n)_n \text{ beschränkt}\}. \end{aligned}$$

---

**Bezeichnung 4.4.12 (Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}_+$)**

Die Verknüpfungen in $\overline{\mathbb{R}}$ (vgl. Bemerkung 2.1.23 erweitert man für Teilbereich der nichtnegativen Elemente

$$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

um eine weitere nützliche Vereinbarung:

In $\overline{\mathbb{R}}_+$ setzt man

$$\frac{1}{0} := \infty,$$

Man kann dann gut mit Kehrwerten nichtnegativen Nullfolgen rechnen (vgl. 2.1.24(1.) und 2.1.25):

$$0 \leqslant a_n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a_n} \to \infty.$$

*Der Ausdruck "$0 \cdot \infty$" bleibt undefiniert!*

---

**Satz 4.4.13 (Formel: Konvergenzradius)**

*Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(c_n)_n$ eine Folge in $V$. Für den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe $\sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$ gilt:*

1. *Es sei $W := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|c_n\|} \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Dann ist mit ($\frac{1}{0} := \infty$)*

$$R = \frac{1}{W} \quad (\text{Cauchy-Hadamard}).$$

2. *Wenn alle Koeffizienten $c_n \neq 0$ sind, gilt in $\overline{\mathbb{R}}_+$*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\|c_{n+1}\|}{\|c_n\|} \leqslant \frac{1}{R} \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\|c_{n+1}\|}{\|c_n\|} .$$

*Wenn die Folge konvergiert: $Q := \lim_{n \to \infty} \frac{\|c_{n+1}\|}{\|c_n\|} \in \overline{\mathbb{R}}_+$, gilt*

$$R = \frac{1}{Q} \quad (\text{Euler}).$$

---

**Bemerkung.** Die Regel (2.) ist in analog zum verwandten Quotientenkriterium 4.3.7 formuliert.

**Beweis (Formeln: Konvergenzradius).**

1.(Cauchy-Hadamard): Für $0 < r < \infty$ gilt:

$$w := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|c_n\| r^n} = r \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|c_n\|} = rW.$$

Aus dem Wurzelkriterium 4.3.6 folgt für die Reihe $\sum_{n\geqslant 0}\|c_n\|r^n$:

$$\begin{aligned}
&\text{Reihe konvergent, wenn } w<1 &&\Leftrightarrow\quad r<\frac{1}{W},\\
&\text{Reihe divergent, wenn } w>1 &&\Leftrightarrow\quad r>\frac{1}{W}.
\end{aligned}$$

Aus der Definition 4.4.10 folgt nun die Gleichung $R=\dfrac{1}{W}$.

Beachte: Wenn $R=0\Leftrightarrow W=\infty$ ist, gibt es kein $r>0$, für das die Reihe $\sum_{n\geqslant 0}\|c_n\|r^n$ konvergiert.

2. Wenn alle Koeffizienten $c_n\neq 0$ sind, folgt aus Lemma 4.3.9

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\|c_{n+1}\|}{\|c_n\|}\leqslant W\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{\|c_{n+1}\|}{\|c_n\|}$$

Die Abschätzung (2.) folgt nun aus der Formel (1.) von Cauchy-Hadamard.

(Euler): Wenn der Grenzwert $Q:=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|c_{n+1}\|}{\|c_n\|}\in\overline{\mathbb{R}}$ existiert, folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|c_{n+1}\|}{\|c_n\|}=W.$$

und somit

$$R=\frac{1}{Q}.$$

---

**Beispiel (Konv.-Bereich: reelle Reihen).**

1. $\sum_{n\geqslant 0}n!x^n$ hat Konvergenzradius $R=0$ (vgl. Beispiel 2.1.13)
2. exp-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $R=\infty$ (vgl. 3.1.40).
3. geom. Reihe $(1+x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ hat Konvergenzradius $R=1$ und Konvergenzbereich $(-1,1)$ (vgl. 2.1.17).
4. Logarithmus-Reihe (vgl. 3.1.45)

   $$\log(1+x)=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

   hat Konv.-radius $R=1$ und Konvergenzbereich $(-1,1]$.
5. Integral-log-Reihe (vgl. 4.4.21 )

   $$\textstyle\int_1^x\log(1+\xi)\,d\xi=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$$

   hat Konv.-radius $R=1$ und Konvergenzbereich $[-1,1]$.

---

**Bemerkung (Konvergenzkreis).**

Für eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt:

1. die Reihe ist im **Konvergenzkreis**
$$\{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$$
absolut konvergent und lokal normal konvergent (vgl. 4.4.8).
2. die Reihe ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ divergent.
3. Wenn $0 < R < \infty$ ist, kann man für die Konvergenz auf dem Rand des Konvergenzkreises keine allgemeine Aussage treffen:
Beispiel 4.4.23:
$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^z \quad \text{für } z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1,\ z \neq 1.$$

---

**Bemerkung.** Das folgende Konvergenzkriterium für Potenzreihen verallgemeinert das Leibniz-Kriterium 4.3.10.

Man erhält das Leibniz-Kriterium im Spezialfall $z = -1$.

Das Kriterium erlaubt in einigen Beispielen, die Konvergenz auf dem Rande des Konvergenzkreises zu bestimmen. Es ist wiederum ein Spezialfall des Konvergenzkriteriums von Dirichlet.

**Lemma 4.4.14 (Koeffizienten: monotone Nullfolge)**

*Es sei $(a_n)_n$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge.*

*Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ lokal gleichmäßig auf $U(0,1)^- \setminus \{1\} = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1,\ z \neq 1\}$.*

*Für $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt für den Reihenrest die Abschätzung:*
$$\Big|\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu z^\nu\Big| \leqslant \frac{2a_m}{|1-z|} \ .$$

---

**Beweis (Koeffizienten: monotone Nullfolge).**

Für $n \geqslant m \geqslant 0$ gilt:
$$(1-z)\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu z^\nu = a_m z^m - \sum_{\nu=m+1}^{n} (a_{\nu-1} - a_\nu) z^\nu - a_n z^{n+1}.$$

Da $0 \leqslant a_{\nu-1} - a_\nu$ ist, folgt für $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$:
$$|1-z|\Big|\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu z^\nu\Big| \leqslant a_m + \sum_{\nu=m+1}^{n} (a_{\nu-1} - a_\nu) + a_n = 2a_m \to 0.$$

Die Partialsummen erfüllen also für $z \neq 1$ die Cauchy-Bedingung 4.2.4

$$|\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu z^\nu| \leqslant \frac{2a_m}{|1-z|} \to 0.$$

---

Für $\delta > 0$ konvergiert die Reihe gleichmäßig auf

$$K_\delta := U(0,1)^- \setminus U(1,\delta) = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1,\ |1-z| \geqslant \delta\}$$

Da die Bereiche $K_\delta$, $(\delta > 0)$ eine offen-kompakte Ausschöpfung (vgl. Bezeichnung 3.4.134) von $U(0,1)^- \setminus \{1\}$ bilden, ist die Reihe lokal gleichmäßig konvergent.

---

**Satz 4.4.15 (Abelscher Grenzwertsatz)**

*Es seien $V$ ein vollständig normierter Raum und $(c_n)_n$ eine Folge in $V$. Wenn die Summe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$$

*für ein $r > 0$ konvergiert, dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$* ***gleichmäßig*** *auf dem Intervall $[0,r] \subset \mathbb{R}$.*

*Insbesondere gilt:*

$$\lim_{x\uparrow r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n.$$

**Bemerkung (zum Beweis).**

Für den Beweis kann man ohne Einschränkung $r = 1$ annehmen:

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} (c_n r^n)\left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

---

**Beweis (Abelscher Grenzwertsatz).**

Wir setzen

$$s_n := \sum_{n=0}^{n} c_n, \quad s := \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Wir untersuchen die Cauchy-Bedingung. Für $n \geqslant m \geqslant 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=m}^{n} c_\nu x^\nu &= \sum_{\nu=m}^{n} ((s_\nu - s) - (s_{\nu-1} - s))x^\nu \\ &= \sum_{\nu=m}^{n} (s_\nu - s)x^\nu - \sum_{\nu=m}^{n} (s_{\nu-1} - s)x^\nu \\ &= \sum_{\nu=m}^{n} (s_\nu - s)x^\nu - x \sum_{\nu=m-1}^{n-1} (s_\nu - s)x^\nu \\ &= -(s_{m-1} - s)x^m - (1-x) \sum_{\nu=m}^{n-1} (s_\nu - s)x^\nu + (s_n - s)x^n.\end{aligned}$$

---

Wir weisen die Cauchy-Bedingung für gleichmäßige Konvergenz nach. Es sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|s_n - s\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geqslant n_0.$$

Für $n \geqslant m \geqslant n_0$ und $x \in [0,1]$ folgt:

$$\begin{aligned}&\| \sum_{\nu=m}^{n} c_\nu x^\nu \| \\ &= \| -(s_{m-1} - s)x^m - (1-x) \sum_{\nu=m}^{n-1} (s_\nu - s)x^\nu + (s_n - s)x^n \| \\ &\leqslant \|(s_{m-1} - s)x^m\| + \|(1-x) \sum_{\nu=m}^{n-1} (s_\nu - s)x^\nu\| + \|(s_n - s)x^n\| \\ &\leqslant \varepsilon(x^m + (1-x) \sum_{\nu=m}^{n-1} x^\nu + x^n) \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Beachte: $(1-x)\sum_{\nu=m}^{n-1} x^\nu = x^m - x^n$.

---

**Beispiel (zum Abelschen Grenzwertsatz)**

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium 4.3.10.

Aus der Reihenentwicklung von $\log(1+x)$ für $x \in (-1,1)$ (vgl. 3.2.26) und dem Abelschen Grenzwertsatz 4.4.15 folgt nun:

$$\log 2 = \lim_{x\uparrow 1} \log(1+x) = \lim_{x\uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

**Anmerkung.** In Beispiel 3.1.45 hatten wir diese Beziehung mit Hilfe der Restgliedformel für das Taylor-Polynom von $\log(1+x)$ gewonnen.

Wir werden in Feststellung 4.4.23 eine weitergehende Aussage für die komplexe Potenzreihe $\log(1+z)$ zeigen.

---

**Beispiel (zum Abelschen Grenzwertsatz)**

Nach Bezeichnung 3.4.20 ist der Arcus-Tangens die Stammfunktion zu

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad \text{für } |x| < 1.$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } x \in (-1,1).$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Nach dem dem Abelschen Grenzwertsatz 4.4.15 gilt die Reihenentwicklung auf $[-1,1]$.

Für $x=1$ erhält man insbesondere die LEIBNIZ-Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \pm \ldots ..$$

### 4.4.2 Rechnen mit Potenzreihen

**Bemerkung** Potenzreihen verhalten sich ähnlich wie Polynome.

In diesem Abschnitt untersuchen wir die **lineare Struktur** von Potenzreihen in einem vollständig normierten Raum.

**Bemerkung 4.4.16 (Potenz-Reihen sind stetig)**

Es seien $V$ ein vollständig normierter Raum und $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ eine Potenzreihe in $V$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Die dargestellte Funktion $f$ ist stetig auf dem Konvergenzkreis:

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^z \quad \text{für } z \in \mathbb{C},\ |z| < R$$

**Beweis.** Da eine Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig konvergiert und die Partialsummen stetig sind, ist nach Satz 3.4.133 die Grenzfunktion $f$ stetig.

---

**Satz 4.4.17 (Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen)**

*Es seien $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ Folgen in $V$ und die Potenzreihen $\sum_n a_n z^n$, $\sum_n b_n z^n$ positive Konvergenzradien.*

*1. Stimmen Summen der beiden Potenzreihenauf einer Umgebung $U$ von $0$ überein:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \textit{für } z \in U,$$

*dann stimmen die Koeffizienten überein:*

$$a_n = b_n \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0 .$$

*2. Es reicht, daß die beiden Summen auf einer gegen $0$ konvergenten Folge $(z_k)_k$ mit $z_k \neq 0$ übereinstimmen. Dann stimmen die Koeffizienten überein.*

---

**Beweis.** Wir zeigen die Aussage (2.). Hieraus folgt (1.). Es sei $\rho$ der kleinere der Konvergenzradien. Dann ist

$$z \mapsto f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n$$

stetig in auf $U(0, \rho)$.

Für $n = 0$ folgt

$$a_0 - b_0 = \lim_{k \to \infty} f(z_k) = 0.$$

Man kann nun induktiv fortfahren:

Es gelte $a_\nu = b_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}} = a_{n+1} - b_{n+1} + z^{n+2} \sum_{\mu=0}^{\infty} (a_{n+2+\mu} - b_{n+2+\mu}) z^\mu$$

und es folgt $a_{n+1} - b_{n+1} = \lim_{k \to \infty} \dfrac{f(z_k)}{z_k^{n+1}} = 0.$

---

### Feststellung 4.4.18 (Addition von Potenzreihen)

*Es seien $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ und $\sum_{m \geqslant 0} b_m z^m$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_1 > 0$ bzw. $R_2 > 0$ und*

$$R := \min\{R_1, R_2\}.$$

*Die **Summen-Reihe** $\sum_{n \geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ zu den beiden Potenzreihen konvergiert für $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| < R$ und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n .$$

*Der Konvergenzradius der Summen-Reihe kann auch größer als $R$ sein.*

**Beweis.** Die Addition zweier konvergenter Potenzreihen ergibt sich aus der Regel 4.2.9 über die Addition konvergenter Reihen.

Da die Summen-Reihe auf der rechten Seite für $|z| < R$ konvergiert, ist ihr Konvergenzradius mindestens $R$.

---

**Ziel:** Wir wollen zeigen, daß man Potenzreihen wie Polynome **gliedweise** integrieren und differenzieren darf.

Wir bilden zunächst durch **gliedweise** Integration bzw. Differentiation eine **formale** Stammfunktion bzw. Ableitung.

Dann untersuchen wir die Konvergenz dieser formal gebildeten Potenzreihe und zeigen, daß sie die gesuchte Stammfunktion bzw. Ableitung darstellt.

**Bezeichnung 4.4.19 (formale Stammfnkt., Ableitung)** Es sei $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, eine Potenzreihe.

1. Die **formale Stammfunktion** ist die unten stehende Folge von Stammfunktionen der Partialsummen:

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{c_{n-1}}{n} x^n.$$

2. Die **formale Ableitung** ist die Folge der Ableitungen der Partialsummen:

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0} c_{n+1}(n+1)x^n.$$

---

**Lemma 4.4.20 (Konvergenzradius der Ableitung)**

1. *Die* ***formale Stammfunktion*** *einer Potenzreihe hat den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.*

2. *Die* ***formale Ableitung*** *einer Potenzreihe hat den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.*

**Bemerkung.** Die formale Stammfunktion kann in einem Randpunkt des Konvergenzintervalls konvergieren, in dem die ursprüngliche Reihe divergiert.

Beipiel: geometrische Reihe $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ und $\log(1-x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ im Punkte $x = -1$.

---

**Beweis (Konvergenzradius der Ableitung).**

2. Die formale Ableitung hat den gleichen Konvergenzradius wie die mit $x$ multiplizierte Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n.$$

Aus der der Formel von Cauchy-Hadamard 4.4.13 (1.) erhält man für den Konvergenzradius $R^*$ der formalen Ableitung:

$$\frac{1}{R^*} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|c_n\|n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|c_n\|} = \frac{1}{R}.$$

Man beachte, daß $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ ist (vgl. 2.2.19).

1. Ebenso hat die formale Stammfunktion den gleichen Konvergenzradius.

---

**Satz 4.4.21 (Integral u. Ableitung von Potenzreihen)**

*Eine Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ ist auf ihrem Konvergenzintervall $(-R, R)$ integrierbar und differenzierbar.*

1. *Im Konvergenzintervall $(-R, R)$ stellt das formale Integral eine Stammfunktion dar.*

*Man darf Potenzreihen **gliedweise integrieren**:*

$$\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n\Big) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \textit{für } -R < x < R.$$

2. *Im Konvergenzintervall $(-R, R)$ stellt die formale Ableitung die Ableitung dar.*

*Man darf Potenzreihen **gliedweise differenzieren**:*

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \quad \textit{für } -R < x < R.$$

---

**Bemerkung (zum Beweis von Satz 4.4.21).**

Wir haben mehrere Möglicheiten, den Satz zu beweisen:

- Man zeigt zuerst (1.) mit Hilfe des Grenzwertsatzes 3.1.17 für Integrale. Aussage (2.) folgt aus (1.) mit dem Hauptsatz 3.2.22 der Differential und Integralrechnung .
- Man zeigt zuerst (2.) mit Hilfe des Grenzwertsatzes 3.2.24 für Ableitungen. Aussage (1.) folgt aus (2.) wie im Beweis des Satzes 4.4.42 (2.)
- Der gesamte Beweis des Satzes 4.4.42 zur komplexen Ableitung und komplexen Stammfunktion einer komlexen Potenzreihe gilt analog im Reellen.

---

**Beweis (Integral u. Ableitung von Potenzreihen).**

1. Für $x \in (-R, R)$ setze man $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit den Partialsummen $f_n(x) := \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x^\nu$. Die Funktion $f$ ist stetig.

Wir betrachten alle **kompakten** Teilintervalle $[-r, r] \subset (-R, R)$.

Nach Satz 4.4.8 (2.) konvergieren die Partialsummen $(f_n)_n$ auf jedem Teilintervall $[-r, r]$ **gleichmäßig** gegen $f$.

Nach Korollar 3.1.17 (2.) konvergieren die Integrale der $f_n$ auf jedem Teilintervall $[-r, r]$ gegen das Integral von $f$:

Nach Lemma 4.4.20 (1.) hat die formale Stammfunktion den gleichen Konvergenzradius $R > 0$. Man setze $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \frac{x^n}{n}$ mit den Partialsummen $F_n(x) := \sum_{\nu=1}^{n} c_{\nu-1} \frac{x^\nu}{\nu}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_0^x f(\xi)\, d\xi &= \lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(\xi)\, d\xi = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} F_{n+1}(x) = F(x) \qquad \text{für } x \in [-r, r].\end{aligned}$$

---

2. Die formale Ableitung $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n$ hat nach Lemma 4.4.20 (2.) denselben Konvergenzradius $R$ wie die Potenzreihe $f$.

Wendet man die Aussage (1.) auf die formale Ableitung an, so erhält man:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)\xi^n\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^{n+1} = f(x) - c_0 \quad \text{für } x \in [-R, R].$$

Da der Integrand auf der linken Seite stetig ist, ist $f$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 3.2.22 differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \quad \text{für } x \in [-R, R].$$

---

**Beispiele 4.4.22 (Komplexe $\log(1+z)$ Reihe)**

Der Hauptzweig des komplexen Logarithmus hat die Reihenentwicklung

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

**Bemerkung.** Wir werden anschließend zeigen, daß die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leqslant 1$ und $z \neq -1$ konvergiert und die Funktion $\log(1+z)$ darstellt.

---

**Beweis (Komplexe $\log(1+z)$ Reihe).**

Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < 1$ und $I := (-|z|^{-1}, |z|^{-1}) \subset \mathbb{R}$.

Für $t \in I$ ist $|tz| < 1$ und $1 + tz$ liegt in der rechten Halbebene.

Nach Definition 3.4.40 des Hauptzweiges des komplexen Logarithmus ist die folgende Funktion also definiert:

$$f : I \ni t \mapsto \log(1 + tz)$$

Ihre Ableitung ist (vgl. Bezeichnung 3.4.46 und Festst. 3.4.48)

$$f'(t) = \frac{z}{1+tz} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n+1} t^n.$$

Die rechte Seite ist eine konvergente Potenzreihe in der Variablen $t \in I$. Nach Satz 4.4.21 erhält man eine Stammfunktion durch gliedweise Integration. Die beiden Stammfunktionen sind gleich:

$$\log(1+tz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} t^n \quad \text{für } t \in I.$$

---

**Feststellung 4.4.23 (Konv.-Bereich $\log(1+z)$- Reihe)**

*1. Die Potenzreihe des komplexen Logarithmus $\log(1+z)$ konvergiert lokal gleichmäßig auf dem Bereich*

$$\{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1,\ z \neq -1\}$$

*und stellt dort die Funktion dar:*

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \ .$$

*2. Für $|z| \leqslant 1,\ z \neq -1$ gilt die Abschätzung*

$$\big|\log(1+z) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1} z^\nu}{\nu}\big| \leqslant \frac{2}{n|1+z|} \ .$$

---

**Beweis (Konvergenzbereich: $\log(1+z)$-Reihe).**

Ersetzt man $z$ durch $-z$ so erhält man eine Potenzreihe

$$-\textstyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n},$$

deren Koeffizienten eine monotone Nullfolge bilden. Aus Lemma 4.4.14 folgt nun die Abschätzung für den Reihenrest:

$$\big|\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} z^\nu}{\nu}\big| \leqslant \frac{2}{n|1+z|} \quad \text{für } |z| \leqslant 1,\ z \neq -1.$$

Für $\delta > 0$ konvergiert die Reihe gleichmäßig auf dem Bereich $U(0,1)^- \setminus U(-1,\delta)$ und ist dort eine stetige Funktion. Auf $U(0,1)$ stellt die Reihe die stetige Funktion $\log(1+z)$ dar. Die beiden Funktionen stimmen also auf $U(0,1)^- \setminus \{-1\}$ überein. Wie in Lemma 4.4.14 gezeigt, ist die Reihe auf $U(0,1)^- \setminus \{-1\}$ lokal gleichmäßig konvergent.

---

**Beispiele 4.4.24 ($\log(1+z)$-Reihe für $|z|=1$)**
Zerlegt man die komplexe Potenzreihe

$$\log(1-z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{für } z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1,\ z \neq 1$$

in Real- und Imaginärteil, so erhält man die auf $(0, 2\pi)$ lokal gleichmäßig konvergenten Reihen (Fourier-Reihen):

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\log(2 \sin \frac{\varphi}{2}) \qquad \text{für } \varphi \in (0, 2\pi).$$
2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2} \qquad \text{für } \varphi \in (0, 2\pi).$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ divergiert die Reihe (1.). Die Reihe (2.) konvergiert dort, die Grenzfunktion (*Sägezahn*) ist aber unstetig in den Endpunkten des Intervalls $[0, 2\pi]$.

---

---

**Bemerkung (Entwicklung eines Polyn. um einen Punkt)**
Man kann ein Polynom $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ um einen Punkt $w \in \mathbb{K}$ entwickeln:

$$P(z) = P(w + (z-w)) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} \underbrace{a_\nu \binom{\nu}{\mu} w^{\nu-\mu} (z-w)^\mu}_{=:\, c_{\nu,\mu}}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{0,0} & & & & \\ +c_{1,0} & +c_{1,1} & & & \\ +c_{2,0} & +c_{2,1} & +c_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ +c_{n,0} & +c_{n,1} & +c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Zeilennr.:} & \nu \\ \text{Spaltennr.:} & \mu \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n} \underbrace{\left( \sum_{\nu=\mu}^{n} a_\nu \binom{\nu}{\mu} w^\mu \right)}_{=:\, b_\mu} (z-w)^\mu = \sum_{\mu=0}^{n} b_\mu (z-w)^\mu$$

---

**Satz 4.4.25 (Reihenentwicklung um einen Punkt)**
*Es sei $V$ ein vollständig normierter Raum und*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

*eine Potenzreihe in $V$ mit Konvergenzradius $R > 0$.*

*Es sei $w \in \mathbb{K}$ mit $|w| < R$. Man kann die Funktion $f$ in eine Potenzreihe um den Punkt $w$ entwickeln:*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_o)^m \quad \text{für } z \in \mathbb{K},\ |z - w| < R - |w|.$$

*Der Konvergenzradius der Entwicklung ist mindestens $R - |w|$.*

*Genauer gilt: für $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - w| < R - |w|$ läßt sich $f(z)$ in eine absolut konvergente Doppelreihe entwickeln:*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} w^{n-m} \right) (z - w)^m.$$

---

**Beweis (Reihenentwicklung um einen Punkt).**

Für $|z| < R$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w + (z - w))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} w^{n-m} (z - w)^m. \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \underbrace{a_n \binom{n}{m} w^{n-m} (z - w)^m}_{= c_{n,m}} . \end{aligned}$$

Man setze:

$$c_{n,m} = \begin{cases} a_n \binom{n}{m} w^{n-m} (z - w)^m & \text{für } n = m, m+1, \ldots, n, \\ 0 & \text{für } n = 0, 1, \ldots, m-1. \end{cases}$$

Vertauscht man in der Doppelreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m}$ die Summationsreihenfolge, erhält man das gewünschte Resultat.

Wir zeigen dazu, daß diese Doppelreihe absolut konvergent ist.

Da die ursprüngliche Potenzreihe den Konvergenzradius $R > 0$ hat und im Innern des Konvergenzkreises absolut konvergent ist, gilt für $|z - w| < R - |w|$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \|c_{n,m}\| &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \|a_n\| \binom{n}{m} |w|^{n-m} |z - w|^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \, (\underbrace{|w| + |z - w|}_{<R})^n < \infty. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.3.22 dürfen wir die Summationsreihenfolge vertauschen. Für $|z - w| < R - |w|$ erhalten wir, wenn wir die Summanden mit $c_{n,m} = 0$ weglassen:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} w^{n-m} (z - w)^m.$$

**Korollar 4.4.26 (Taylor-Koeffizienten)**

*1. Entwickelt man eine Potenzreihe $f$ um einen Punkt $w$ im Konvergenzkreis:*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-w)^m \quad \text{für } z \in \mathbb{K},\ |z-w| < R - |w|,$$

*so gilt für die* ***Entwicklungskoeffizienten****:*

$$b_m = b_m(w) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} w^{n-m}.$$

*Als Funktionen von $w$ sind die Entwicklungskoeffizienten $b_m = b_m(w)$ Potenzreihen in $w$.*

*2. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind die Entwicklungskoeffizienten die* ***Taylor-Koeffizienten*** *von $f$ (vgl. Feststellung* 3.1.44 *):*

$$b_m(w) = \frac{f^{(m)}(w)}{m!} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_0\,.$$

---

**Beweis (Taylor-Koeffizienten).**

1. Die Formel für die Entwicklungskoeffizienten $b_m$ folgt aus Satz 4.4.25 und der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer konvergenten Potenzreihe (vgl. Satz *4.4.17*).

2. Nach Satz 4.4.21(2.) ist eine Potenzreihe in Innern des Konvergenzkreises differenzierbar und die Ableitung ist wieder eine Potenzreihe.

Induktiv erhält man für die $n$-te Ableitung die Reihenentwicklung:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!} z^{n-m}.$$

Ein Vergleich der Reihen $b_n(w)$ (siehe 4.4.26) und $f^{(n)}(w)$ ergibt:

$$b_m(w) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} w^{n-m} = \frac{f^{(m)}(w)}{m!} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_0\,.$$

### 4.4.3 Cauchy-Produkt

**Ziel (Produkt von Potenzreihen).**

Das Produkt zweier konvergenter Potenzreihen $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum_{m\geqslant 0} b_m z^n$ ist wieder eine konvergente Potenzreihe.

Das Produkt zweier Partialsummen kann man folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \cdot \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^\mu = \sum_{k=0}^{m+n} \Bigg( \sum_{\substack{\nu=0,\ldots,n\\ \mu=0,\ldots,m\\ \nu+\mu=k}} a_\nu b_\mu \Bigg) z^k$$

Läßt man nun $n \to \infty$ und $m \to \infty$ gehen, so vermutet man für die Grenzwerte die folgende Formel:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu = \sum_{k=0}^{m+n} \Bigg( \sum_{\substack{\nu=0,\ldots,k\\ \mu=0,\ldots,k\\ \nu+\mu=k}} a_\nu b_\mu \Bigg) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} a_k b_{k-l} z^k.$$

**Bezeichnung 4.4.27 (Cauchy-Produkt von Reihen)**

Für zwei Reihen $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ und $\sum_{m\geqslant 0} b_m$ heißt die Reihe

$$\textstyle\sum_{k\geqslant 0} \displaystyle\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}\, b_l = \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \displaystyle\sum_{l=0}^{k} a_l\, b_{k-l}$$

das **Cauchy-Produkt** der beiden Reihen.

Man ordne die Produkte $a_n b_m$ in einer unendlichen Matrix an:

$$\begin{array}{rccccc}
 & a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \dots \\
{\scriptstyle k=0} \nearrow & a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & . & \dots \\
{\scriptstyle k=1} \nearrow & a_2b_0 & a_2b_1 & . & . & \dots \\
{\scriptstyle k=2} \nearrow & a_3b_0 & . & . & . & \dots \\
{\scriptstyle k=3} \nearrow & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Im Cauchy-Produkt wird zuerst über die **Schrägzeilen** von **links unten** nach **rechts oben** summiert und dann die Reihe der **Schrägzeilen-Summen** gebildet.

---

**Satz 4.4.28 (Cauchy-Produkt von Reihen)**

*Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_m))_{m\in\mathbb{N}_0}$ Folgen in $\mathbb{K}$.*

*1. Es seien $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ absolut konvergent, $\sum_{m\geqslant 0} b_m$ konvergent:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \qquad A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad B := \sum_{m=0}^{\infty} b_m.$$

*Dann konvergiert das **Cauchy-Produkt** der Reihen und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_l\, b_{k-l} = AB.$$

*2. Wenn beide Reihen absolut konvergent sind, ist auch das Cauchy-Produkt absolut konvergent.*

---

**Beweis (Cauchy-Produkt von Reihen).**
Wir setzen:

$$A_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu, \quad A := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu, \quad B_m := \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu, \quad B := \sum_{\mu=0}^{\infty} m_\mu.$$

$$\beta_m = B - B_m \to 0, \quad \alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty.$$

Für die Partialsummen des Cauchy-Produkt gilt:

$$\begin{aligned} C_k &:= \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} a_\lambda b_{\varkappa-\lambda} \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0) \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{k} a_\varkappa B_{k-\varkappa} = \sum_{\varkappa=0}^{k} a_0(B - \beta_{k-\varkappa}) = \underbrace{A_kB}_{\to AB} - - \underbrace{\sum_{\varkappa=0}^{k} a_\varkappa \beta_{k-\varkappa}}_{\to 0\ (!)}. \end{aligned}$$

---

Zu zeigen ist, daß $\sum_{\varkappa=0}^{k} a_\varkappa \beta_{k-\varkappa} \to 0$ für $k \to \infty$:
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß

$$\begin{aligned} \alpha|\beta_m| &< \varepsilon \quad \text{für } m \geqslant m_0, \\ |a_n|\Big(\sum_{\mu=0}^{m_0} |\beta_\mu|\Big) &< \varepsilon \quad \text{für } n \geqslant n_0. \end{aligned}$$

Für $k \geqslant m_0 + n_0$ folgt nun:

$$\begin{aligned} |\sum_{\varkappa=0}^{k} a_\varkappa \beta_{k-\varkappa}| &= |\sum_{\mu=0}^{k} a_{k-\mu}\beta_\mu| \\ &\leqslant |\sum_{\mu=0}^{m_0} a_{k-\mu}\beta_\mu| + |\sum_{\mu=m_0+1}^{k} a_{k-\mu}\beta_\mu| \\ &\leqslant \max_{v \geqslant n_0} |a_\nu| \sum_{\mu=0}^{m_0} |\beta_\mu| + \sum_{\mu=m_0+1}^{k} |a_{k-\mu}| \max_{\mu \geqslant m_0} |\beta_\mu| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

---

**Bemerkung.** Mit dem gleichen Beweisverfahren zeigt man:

**Bemerkung 4.4.29 (Cauchy-Produkt in Algebren)**

Es sei $V$ eine normierte Algebra.

1. Für zwei konvergente Reihen $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ und $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ in V, von denen eine **normal konvergent** ist, konvergiert das Cauchy-Produkt und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} a_k b_{k-l} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m.$$

2. Wenn beide Reihen normal konvergent sind, ist auch das Cauchy-Produkt normal konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \|a_k b_{k-l}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \|b_m\|.$$

---

**Beispiele 4.4.30 (Funktionalgleichung der** exp**-Reihe)**

Im einleitenden Beispiel 4.1.1 hatten wir die Funktionalgleichung der Exponentialreihe hergeleitet:

> *In einer vollständig normierten Algebra $V$ definiert man:*
>
> $$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
>
> *für $\in V$. Dann gilt*
>
> $$(\exp x)\cdot(\exp y) = \exp(x+y) \quad \textit{für } x,\, y \in V \textit{ mit } xy = yx.$$

Der Beweis 4.1.1 verwendet die folgenden Hilfmittel

- exp-Reihe ist absolut konvergent.
- **Cauchy-Produkt** von Reihen 4.4.29.
- Für kommutierende Elemente gilt die binomische Formel.

---

**Bemerkung (komplexe Exponentialfunktion** $\exp z$**).**

Für die komplexe Exponentialfunktion 3.4.38 gilt (vgl. die Rechnung in 4.1.2):

$$\begin{aligned}\exp z &:= \exp x \cdot (\cos y + i \sin y)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

---

**Satz 4.4.31 (Produkt von Potenzreihen)**

*Es seien* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *und* $\sum_{m\geqslant 0} b_m z^m$ *Potenzreihen mit Konvergenzradien* $R_1 > 0$ *bzw.* $R_2 > 0$ *und*

$$R := \min\{R_1, R_2\}.$$

*Das* ***Cauchy-Produkt*** $\sum_{k\geqslant 0}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} z^k$ *der beiden Potenzreihen konvergiert für* $z \in \mathbb{K}$ *mit* $|z| < R$ *und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\Big) z^k.$$

*Der Konvergenzradius des Cauchy-Produktes kann auch größer als* $R$ *sein.*

**Korollar 4.4.32 (Produkt von Potenzreihen)**

*Die Aussagen des Satzes* 4.4.31 *über das Cauchy-Produkt zweier Potenzreihen gelten, wenn zumindest eine der beiden Potenzreihen in dem Punkt* $z$ *absolut konvergiert.*

**Beispiele 4.4.33 (Konvergenzradius des Cauchy-Produkts)**

Der Konvergenzradius des Cauchy-Produktes kann größer sein, als Minimum der Konvergenzradien der Faktoren:

$$(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1.$$

---

**Beweis (Produkt von Potenzreihen).**

Die Formel für das Produkt zweier Potenzreihen ergibt sich aus den Eigenschaften 4.4.28 des Cauchy-Produkts.

Da die Reihe auf der rechten Seite für $|z| < R$ konvergiert, ist ihr Konvergenzradius mindestens $R$.

---

**Beispiele 4.4.34 (divergentes Cauchy-Produkt)**

Die Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergiert nach dem Kriterium 4.4.14 für $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$ und divergiert für $z = 1$. Ihr Konvergenzradius ist also $R = 1$. Das Cauchy-Produkt ergibt:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}\Big)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{(l+1)(k-l+1)}}\Big) z^k.$$

Für die Koeffizienten $c_k$ des Cauchy-Produktes gilt:

$$(l+1)(k-l+1) = \Big(\frac{k+2}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{k-2l}{2}\Big)^2 \leqslant \Big(\frac{k+2}{2}\Big)^2$$

$$c_k \geqslant \sum_{l=0}^{k} \frac{2}{k+2} = \frac{2(k+1)}{k+2} \to 2 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Die Reihe divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, da die Summanden keine Nullfolge bilden.

---

**Bemerkung 4.4.35 (konvergentes Cauchy-Produkt)**

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen in $\mathbb{K}$ oder einer vollständig normierten Algebra.

Wenn die Reihen

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

und ihr Cauchy-Produkt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l}$$

konvergieren, dann ist der Wert des Cauchy-Produkts gleich dem Produkt der Reihen:

$$C = A \cdot B.$$

---

**Beweis (konvergentes Cauchy-Produkt).**

Wir bilden für $x \in (-1,1]$ die Potenzreihen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

$$h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \Big( \sum_{l=0}^{k} a_l \cdot b_{k-l} \Big) x^k.$$

Da nach Satz 4.4.31 die Cauchysche Produktformel für Potenzreihen gilt, folgt

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) \quad \text{für } x \in (-1,1).$$

Aus dem Abelschen Grenzwertsatz 4.4.15 folgt nun:

$$A \cdot B = \lim_{x\uparrow 1} f(x) \cdot \lim_{x\uparrow 1} g(x) = \lim_{x\uparrow 1} h(x) = C.$$

---

**Beispiel (konvergentes Cauchy-Produkt).**

Wir bilden mit Hilfe des Cauchy-Produkts das Quadrat der Logarithmus-Reihe $\log(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$, für $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$:

$$\sum\nolimits_{k\geqslant 0} \Big( \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(l+1)(k-l+1)} \Big) z^k$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Kriterium 4.4.14, da ihre Koeffizienten $c_k$ eine monotone Nullfolge bilden:

$$c_{2k+1} := \sum_{l=0}^{2k+1} \frac{1}{(l+1)((2k+1)-l+1)} \leqslant \frac{2}{k+2} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l+1} \to 0.$$

$$\begin{aligned}
c_k - c_{k+1} &= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(l+1)(k-l+1)} - \sum_{l=0}^{k+1} \frac{1}{(l+1)(k-l+2)} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(l+1)(k-l+1)} - \sum_{l=1}^{k+1} \frac{1}{(l+1)(k-l+2)} - \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(l+1)(l+2)(k-l+1)} - \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(l+1)(l+2)} \Big( \frac{1}{k-l+1} - \frac{1}{k+1} \Big) \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(l+1)(l+2)} \cdot \frac{l}{(k-l+1)(k+1)} \ \geqslant 0 \ .
\end{aligned}$$

Man beachte $\frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(l+1)(l+2)} = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \left( \frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+2} \right) = \frac{1}{k+2}$.

---

### 4.4.4 Komplexe Ableitung von Potenzreihen

**Ziel (Komplexe Differentiation).**

Die Ergebnisse über reelle Potenzreihen legen nahe, nach dem Vorbild der reellen Ableitung eine **komplexe Ableitung** einzuführen.

**Ausblick.** Trotz der formalen Ähnlichkeit zur reellen Differenzierbarkeit erhält man für komplex differenzierbare Funktionen viel stärkere Resultate (siehe: Funktionentheorie):

- *Eine auf einem Gebiet einmal komplex differenzierbare Funktion $f$ kann um jeden Punkt des Gebietes in eine gegen $f$ konvergente* ***Potenzreihe*** *entwickelt werden.*

  *Solche Funktionen heißen* ***analytische*** *Funktionen.*

Die komplexe Differenzierbarkeit ist also eine viel **stärkere Forderung** als die reelle Differenzierbarkeit.

---

**Definition 4.4.36 (Komplexe Ableitung)**

*Es seien $V$ ein vollständig normierter Raum, $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to V$ eine Abbildung und $z_0 \in G$.*

*1. Die Abbildung $f$ heißt im Punkte $z_0$* ***komplex differenzierbar****, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert:*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

*Der Grenzwert $\frac{d}{dz} f(z_0) = f'(z_0)$ heißt die* ***komplexe Ableitung*** *von $f$ im Punkte $z_0$.*

*2. $f$ heißt komplex differenzierbar* ***auf*** *$G$, wenn es in jedem Punkt aus $G$ komplex differenzierbar ist.*

*3. Eine auf $G$ komplex differenzierbare Abbildung $F : G \to V$ heißt eine* ***komplexe Stammfunktion*** *von $f$, wenn $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$ gilt.*

---

**Beispiele 4.4.37 (komplexe Ableitung)**

1. $(z^n)' = nz^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{R}$.
2. $(z^{\frac{1}{n}})' = \dfrac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

**Beweis.** Der Beweis beruht auf der binomischen Formel und der Stetigkeit der Potenz- bzw. Wurzelfunktion.

1. Der Beweis zu Beispiel 3.2.5 (1.) gilt genauso für die komplexe Ableitung der komplexen Potenzfunktion.
2. Der Hauptzweig der $n$-ten Wurzel ist auf der geschlitzten komplexen Ebene erklärt (vgl. 3.4.31 und 3.3.15)

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ni z \mapsto z^{\frac{1}{n}} := |z|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i \frac{\arg z}{n}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

   und stetig und injektiv. Der Beweis zu Beispiel 3.2.5 (2.) gilt genauso für die komplexe Wurzel

---

**Beispiel ( $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$ nicht komplex differenzierbar)**

Es gibt ganz einfache Funktionen einer komplexen Variablen, die nicht komplex differenzierbar sind:

1. **Realteil** und **Imaginärteil** sind **nicht** komplex differenzierbar:

$$\frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}{z - z_0} = \begin{cases} 1 & \text{für } z := z_0 + h \text{ mit } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } z := z_0 + ih \text{ mit } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

2. die **Konjugation** $z \mapsto \overline{z}$ ist **nicht** komplex differenzierbar.

3. Der **Betrag** $z \mapsto |z|$ und die **Argumentfunktion** $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ni z \mapsto \arg z$ sind **nicht** komplex differenzierbar.

   Dagegen ist der komplexe Logarithmus

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ni z \mapsto \log |z| + i \arg z$$

   komplex differenzierbar! (vgl. Beispiel 4.4.38

---

**Beispiele 4.4.38 ( komplexe Ableitung von $\log z$)**

Der Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist auf seinem Definitionsbereich komplex differenzierbar und hat die komplexe Ableitung:

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- .$$

---

**Beweis (komplexe Ableitung von $\log z$).**

Wir betrachten zunächst die Ableitung im Punkte $z = 1$:

Es gilt (vgl. 4.4.22):

$$(\log z)'_{z=1} = \lim_{w \to 0} \frac{\log(1+w)}{w} = \lim_{w \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} w^{n-1}}{n} = 1.$$

Für den allgemeinen Fall, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $z$ und $z + w$ in derselben Halbenebe – obere oder rechte oder untere Halbebene – liegen. Nach Feststellung 3.4.42(2.) gilt dann $\log \frac{z+w}{z} = \log(z+w) - \log z$. Es folgt

$$(\log z)' = \lim_{w \to 0} \frac{\log(z+w) - \log z}{w} = \lim_{w \to 0} \frac{1}{z} \cdot \frac{\log(1 + \frac{w}{z})}{\frac{w}{z}} = \frac{1}{z} .$$

---

**Beispiele 4.4.39 ( komplexe Ableitung von $\exp z$)**

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp z$ ist auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und hat die komplexe Ableitung:

$$\frac{d \exp z}{dz} = \exp z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

---

**Beweis (komplexe Ableitung von** $\exp z$**).**

Wir betrachten zunächst die Ableitung im Punkte $z = 0$:

Aus der Reihenentwicklung 4.1.2 folgt:

$$(\exp z)'_{z=0} = \lim_{w\to 0} \frac{\exp w - \exp 0}{w} = \lim_{w\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{n!} = 1.$$

Der allgemeine Fall folgt nun aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (vgl. 3.4.39 (1.)):

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w \quad \text{für } z,\, w \in \mathbb{C}.$$

Hiermit folgt für $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(\exp z)' &= \lim_{w\to 0} \frac{\exp(z+w) - \exp z}{w} \\ &= \lim_{w\to 0} \exp z \cdot \frac{\exp w - \exp 0}{w} = \exp z.\end{aligned}$$

---

**Bemerkung.** Die Begriffsbildung und die elementaren Rechengesetze sind für die komplexe Ableitung völlig analog zum reellen Fall:

differenzierbar $\Rightarrow$ stetig: 3.2.6,

Linearität, Produkt und Quotientenregel: 3.2.7,

Differenzierbarkeit $\Leftrightarrow$ lineare Approximierbarkeit: (3.2.9,

Kettenregel 3.2.10,

Ableitung der Umkehrfunktion 3.2.11

Die Beweise lassen leicht auf den komplexen Fall übertragen.

Zur Vereinfachung formulieren wir die Regeln für **Funktionen** $f : G \to \mathbb{C}$. Sie gelten aber **allgemeiner**, soweit die Verknüpfungen erklärt sind, für Abbildungen in einen normierten Raum oder eine normierte Algebra.

**Feststellung 4.4.40 (Regeln für die komplexe Ableitung)**

*Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Die Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien im Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar.*

*Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g, \quad f \cdot g \quad \textit{und, falls } g(z_0) \neq 0, \ \frac{f}{g}$$

*an der Stelle $z_0$ komplex differenzierbar. Es gelten die Regeln:*

**Linearität:** $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$,
$(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$ *für* $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Produktregel:** $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

**Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$ .

**Beweis.** Vgl. den Beweis zu Satz 3.2.7.

---

**Bemerkung (zu den Rechenregeln der Ableitung).**

Die Rechenregeln für die komplexe Ableitung gelten allgemeiner für Abbildungen in einen komplexen normierten Raum bzw. eine komplexe normierte Algebra.

Die **Linearität** der Ableitung gilt für Abbildungen in einen normierten Raum.

Die **Produktregel** gilt für alle beschränkten bilinearen – *nicht sesquilinearen (!)* – Abbildungen $b$ (vgl. 4.2.8):

$$(b(f(z), g(z)))' = b(f'(z), g(z)) + b(f(z), g'(z)).$$

Die **Quotientenregel** gilt für Abbildungen in eine normierte Algebra. Wenn die Inverse $g(z)^{-1}$existiert, gilt

$$(g^{-1}(z))' = -g(z)^{-1} \cdot g'(z) \cdot g(z)^{-1}.$$

---

Wie im Reellen folgt nun (vg.l Beispiel 3.2.8)

**Beispiele 4.4.41 (kompl. Ableitung von rat. Funkt.)**

Aus den Regeln 4.4.40 folgt, daß rationale Funktionen komplex differenzierbar sind und die Ableitung wie üblich berechnet werden kann.

1. Für die Potenzen gilt:

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z} \text{ und } z \neq 0 \text{ falls } n < 0.$$

2. Polynome werden gliedweise differenziert:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n) \\ = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}. \end{aligned}$$

---

**Satz 4.4.42 ($\mathbb{C}$-Abl. und Stammfnkt von Pot.Reihen)**

*Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist auf ihrem Konvergenzkreis $U(0, R)$* ***komplex differenzierbar*** *und hat eine* ***komplexe Stammfunktion*** *$F$.*

1. *Im Konvergenzkreis stellt die formale Ableitung die Ableitung dar. Man darf Potenzreihen* ***gliedweise*** *komplex differenzieren:*

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)z^n \quad \textit{für } |z| < R.$$

2. *Im Konvergenzkreis stellt die formale Stammfunktion eine Stammfunktion $F$ dar. Man darf die Stammfunktion einer Potenzreihe* ***gliedweise*** *bilden:*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}\frac{z^n}{n} \quad \textit{für } |z| < R.$$

---

**Beweis ($\mathbb{C}$-Abl. und Stammfnkt von Pot.Reihen).**

1. Um die Ableitung von $f$ im einem Punkt $w$ zu berechnen, entwickle man die Funktion um diesen Punkt (vgl. 4.4.25):

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-w)^m \quad \text{für } z \in \mathbb{K},\ |z-w| < R - |w|.$$

Dann folgt

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \lim_{z \to w} \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z-w)^{m-1} = b_1$$

Nach Korollar 4.4.26 hat der Koeffizient $b_1(w)$ die Potenzreihenentwicklung

$$f'(w) := b_1(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)w^n.$$

Die formale Ableitung 4.4.19 (2.) ergibt die Potenzreihenentwicklung der komplexe Ableitung $f'$.

---

2. Nach Lemma 4.4.20 (1.) hat die formale Stammfunktion von $f$ den gleichen Konvergenzradius $R > 0$. Es sei $F$ der Grenzwert der formalen Stammfunktion (vgl. 4.4.19(1.))

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}\frac{z^n}{n} \quad \text{für } |z| < R.$$

Die formale Ableitung der Potenzreihe $F$ ergibt die ursprüngliche Potenzreihe $f$ (vgl. 4.4.19(2.)).

Nach (1.) ist die komplexe Ableitung $F' = f$, d. h. $F$ ist komplexe Stammfunktion zu $f$.

---

**Beispiel (Komplexe Ableitung von Potenzreihen)**

1. Für die Exponentialreihe 4.1.2 gilt
$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

2. Für die $\log(1+z)$-Reihe gilt
$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}.$$

---

**Beispiele 4.4.43 (Komplexe Abl. der Binomialreihe)**
Für alle $s \in \mathbb{C}$ konvergiert die Binomialreihe (vgl. 4.3.13):
$$B_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$
Für ihre Ableitung gilt:
$$\frac{d\,B_s(z)}{dz} = sB_{s-1}(z).$$

**Beweis (Komplexe Ableitung der Binomialreihe).**
Gliedweises Differenzieren ergibt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$:
$$\begin{aligned}\frac{d\,B_s(z)}{dz} &= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{s}{n}nz^{n-1} = s\sum_{n=1}^{\infty}\binom{s-1}{n-1}nz^{n-1}\\ &= s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s-1}{n}z^n = sB_{s-1}(z).\end{aligned}$$

---

**Beispiel (Berechnung von $B_k(z)$ für $k \in \mathbb{Z}$).**

1. Binomische Formel: $(1+z)^k = B_k(z)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

2. Die geometrische Reihe ergibt für $|z| < 1$
$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{n}z^n = B_{-1}(z).$$
Differenziert man die geometrische Reihe so erhält man:
$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\Big(\frac{1}{1+z}\Big)' = -\big(B_{-1}(z)\big)' = B_{-2}(z).$$

3. Induktiv folgt durch weiteres Differenzieren:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^{k+1}} &= \frac{1}{-k}\left(\frac{1}{(1+z)^k}\right)' \\ &= \frac{1}{-k}\big(B_{-k}(z)\big)' = B_{-(k+1)}(z).\end{aligned}$$

---

**Bemerkung (zum Differenzenquotient)**
Man kann den Differenzenquotienten in den Nullpunkt verschieben

$$\begin{aligned}f'(z_0) &:= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\ &= \lim_{w\to 0}\frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w},\end{aligned}$$

wobei $w \in G - z_0$ läuft. Nun gilt analog zu Lemma 3.2.9 :

**Lemma 4.4.44 (lineare Approximation)**
*Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann im Punkte $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, wenn es eine in $w = 0$ stetige Funktion $\varphi : G - z_0 \mapsto \mathbb{C}$ gibt, so daß*

$$f(z_0+w) - f(z_0) = \varphi(w)\cdot w \quad \textit{für } w \in G - z_0.$$

*Dann ist $f'(z_0) = \varphi(0)$.*

---

**Bemerkung.** Analog zu Satz 3.2.10 folgt nun die Kettenregel für die komplexe Ableitung:

**Satz 4.4.45 (Kettenregel für kompl. Ableitungen)**

*Es seien $G$, $\tilde{G} \subset \mathbb{C}$ offen und $h : G \xrightarrow{f} \tilde{G} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ Funktionen. Wenn*

*$f$ an der Stelle $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist,*

*$g$ an der Stelle $f(z_0) \in \tilde{G}$ komplex differenzierbar ist,*

*dann ist die Komposition $h = g \circ f$ an der Stelle $z_0$ komplex differenzierbar. Es gilt die* ***Kettenregel***

$$(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\cdot f'(z_0).$$

---

**Bemerkung.** Zur Unterscheidung der verschiedenen Ableitungen sprechen wir für eine komplexwertige Funktion $f$ einer reellen Variablen von **reeller Differenzierbarkeit**. (vgl. Bezeichnung 3.4.46)

Die folgende Feststellung beweist man wie den Satz 3.2.10.

**Feststellung 4.4.46 (Kettenr. für kompl.–reelle Abl.)**

*Es seien $I \subset \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{C}$ offen und $h : I \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ Funktionen. Wenn*

> *$f$ an der Stelle $t_0 \in I$* ***reell*** *differenzierbar ist,*
>
> *$g$ an der Stelle $f(z_0) \in G$* ***komplex*** *differenzierbar ist,*

*dann ist die Komposition $h = g \circ f$ an der Stelle $t_0$* ***reell*** *differenzierbar. Es gilt die* ***Kettenregel***

$$(g \circ f)'(t_0) = g'(f(t_0)) \cdot f'(t_0).$$

---

**Bemerkung.** In der Funktionentheorie zeigt man eine viel schärfere Form des komplexen Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung. Ein ganz einfaches Resultat ist:

**Bemerkung 4.4.47 (komplexe Form des Hauptsatzes)**

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar.

1. Für eine stetig reell differenzierbare Funktion $\gamma : [a, b] \to U(0, R)$ gilt

$$\int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

2. In einen Kreisscheibe mit Mittelpunkt $w$ kann man für $\gamma$ die Strecke von $w$ nach $z$ wählen:

$$f(z) = f(w) + \int_0^1 f'(w + t(z - w)) \cdot (z - w)\, dt.$$

---

**Beweis (komplexe Form des Hauptsatzes).**

1. Nach der Kettenregel 4.4.46 und nach Definition 3.4.46 des Integrals einer komplexwertigen Funktion einer reellen Variablen gilt

$$\int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b (f(\gamma(t)))'\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(b)).$$

2. Die Verbindungstrecke von $w$ nach $z$ ist das *Geradenstück*

$$\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto w + t(z - w).$$

---

**Korollar 4.4.48 (Eindeutigkeit: kompl. Stammfnkt)**

*1. Auf einer offenen Kreischeibe ist eine komplex differenzierbare Funktionen $f$ mit komplexer Ableitung $f' = 0$ **konstant**.*

*2. Auf einer offenen Kreischeibe unterscheiden sich zwei komplex differenzierbare Funktionen mit gleicher Ableitung nur um eine Konstante.*

**Bemerkung.** Korollar 4.4.48 gilt allgemeiner auch für **sternförmige** Gebiete.

Ein offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt **sternförmiges Gebiet**, wenn es einen *"Mittelpunkt"* $z_0 \in G$ gibt, so daß für alle $z \in G$ die Verbindungstrecke von $z_0$ nach $z$ ganz in $G$ liegt.

**Beispiel:** Die geschlitze komplexe Ebene $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ ist sternförmig mit *"Mittelpunkt"* $z_0 = 1$.

---

**Beispiele 4.4.49 (Entwicklung von $\log z$ um $w$)**

Für $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sei $r := \operatorname{dist}(w, \mathbb{R}_-)$ der Abstand zu negativen $x$-Achse.

Der Hauptzweig des komplexen Logarithmus hat um den Punkt $w$ die Reihenentwicklung

$$\log z = \log w + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, w^n} (z-w)^n$$
$$\text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z-w| < r.$$

**Bemerkung.** Der Konvergenzradius der Potenzreihe 4.4.49 ist $R := |w| \geqslant r$.

In dem Teil der Kreisscheibe $U(w, R)$, der die negative $x$-Achse überragt, stellt die Reihe einen **anderen Zweig** des komplexen Logarithmus dar, der sich um $\pm i 2\pi$ unterscheidet.

---

**Beweis.**

Da $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ist, ist $0 < r := \operatorname{dist}(w, \mathbb{R}_-) \leqslant |w|$. Für $|z - w| < r$ ist

$$\left|\frac{z-w}{w}\right| < 1 \quad \text{und} \quad z \in U(w, r) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- .$$

Also gilt

$$(\log z)' = \frac{1}{z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-w}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^{n+1}} (z-w)^n$$

Nach Bemerkung 4.4.47 (2.) und nach Satz 4.4.21 (1.) gilt

$$\begin{aligned} \log z &= \log w + \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^{n+1}} (z-w)^n t^n \cdot (z-w)\, dt \\ &= \log w + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{w^n} (z-w)^n \frac{t^n}{n} \right|_{t=0}^{t=1} . \end{aligned}$$

---

**Bemerkung.** Vergleicht man die Reihenentwicklung von $\log z$ um den Punkt $w$ mit der $\log(1+z)$-Reihe 4.4.22, so folgt:

**Korollar 4.4.50**

*Für* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z-w| < \operatorname{dist}(w, \mathbb{R}_-)$ *gilt*

$$\log \frac{z}{w} = \log z - \log w.$$

**Beweis (des Korollars 4.4.50).**

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < \operatorname{dist}(w, \mathbb{R}_-)$ gilt

$$\left|\frac{z-w}{w}\right| < 1$$

und somit nach Beispiel 4.4.22 und Beispiel 4.4.49

$$\log \frac{z}{w} = \log\Big(1 + \frac{z-w}{w}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Big(\frac{z-w}{w}\Big)^n = \log z - \log w.$$

---

**Bezeichnung 4.4.51 (komplexe Potenzfunktion)**

Es sei $c \in \mathbb{C}$.

Auf der geschlitzten komplexen Ebene erklärt man den Hauptzweig der **komplexen Potenzfunktion**

$$z \mapsto z^c := \exp(c \cdot \log z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Für ganzzahlige $n \in \mathbb{Z}$ ergibt diese Definition den üblichen Wert. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$.

**Bemerkung.** Für die komplexe Potenzfunktion gilt

1. Die Funktionalgleichung:

$$z^{c_1} \cdot z^{c_2} = z^{c_1+c_2} \quad \text{für } c_1,\, c_2 \in \mathbb{C} \text{ und } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

2. Die komplexe Potenzfunktion ist komplex differenzierbar:

$$(z^c)' = c\, z^{c-1} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

---

**Beispiele 4.4.52 (Entwicklung von $1+z)^c$)**

Für $c \in \mathbb{C}$ hat die Potenzfunktion $z^c$ eine Enwicklung in eine Potenzreihe um den Punkt 1 mit Konvergenzradius $R = 1$.

Die **Binomische Reihe** stellt die Potenzfunktion $(1+z)^c$ dar:

$$(1+z)^c = B_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

---

**Beweis (Entwicklung von $1+z)^c$).**

Nach Beispiel 4.3.13 hat die Binomialreihe den Konvergenzradius $R = 1$.

Nach Beispiel 4.4.43 folgt:

$$\begin{aligned}(1+z)B_c'(z) = (1+z)cB_{c-1}(z) &= c(1+z)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-1}{n} z^n \\ &= c\sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{c-1}{n} + \binom{c-1}{n-1}\right] z^n \\ &= c\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} z^n = cB_c(z).\end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$\big((1+z)^c\big)' = c(1+z)^c.$$

---

Nach Definition 4.4.51 ist $(1+z)^c \neq 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Die Ableitung des Quotienten

$$g(z) := \frac{B_c(z)}{(1+z)^c}$$

verschwindendet:

$$\begin{aligned}g'(z) &= \frac{B_c'(z)(1+z)^c - B_c(z)\cdot c(1+z)^{c-1}}{(1+z)^{2c}} \\ &= (1+z)^{c-1}\frac{(1+z)B_c'(z) - cB_c(z)}{(1+z)^{2c}} = 0.\end{aligned}$$

Nach Korollar 4.4.48 ist $g$ konstant:

$$g(z) = g(1) = 1.$$

Also ist $(1+z)^c = B_c(z)$ für $|z| < 1$.

---

**Bezeichnung 4.4.53 ($\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$)**

Manchmal faßt man zwei Reihen zu einer Reihe zusammen,deren Summationsindex von $-\infty$ bis $\infty$ läuft:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n + \sum_{n\geqslant 1} b_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n,$$

wobei

$$c_n := \begin{cases} a_n & \text{für } n = 0, 1, 2, 3 \ldots, \\ b_n & \text{für } n = -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Für die Konvergenzbetrachtung handelt es sich um **zwei** unabhängige Reihen. Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ konvergiert, wenn **beide** Summanden $\sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n$ konvergieren.

Da es für die Konvergenz auf endlich viele Summanden nicht ankommt, kann man die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ auch an einer anderen Stelle in zwei Reihen zerlegen:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n + \sum_{n=-\infty}^{n_0-1} c_n.$$

---

**Bezeichnung 4.4.54 (Laurent-Reihen)**

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$$

heißt eine **Laurent-Reihe**. Für die Konvergenzbetrachtung handelt es sich um die **Summe zweier Reihen**

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n + \sum_{n\geqslant 1} c_{-n} z^{-n}.$$

Der zweite Summand – **Hauptteil** genannt – ist eine Potenzreihe, in die man $z^{-1}$ als Variable eingesetzt hat.

Hat die erste Potenzreihe den Konvergenzradius $R > 0$ und die Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n} z^n$ den Konvergenzradius $0 < \rho < \infty$ so sei $r := \frac{1}{\rho}$.

Wenn $r < R$ ist, konvergiert die Laurentreihe in dem Kreisring (lat.: *annulus*)

$$A(0, r, R) := \{z \mid z \in \mathbb{C},\ r < |z| < R\}.$$

---

**Beispiele 4.4.55 (Entwickl. der geom. Reihe um $\infty$)**

Die Funktion $(1-z)^{-1}$ kann man in dem unendlichen Kreisring $A(0, 1, \infty)$ in eine Laurentreihe entwickeln.

Diese Reihe entsteht, wenn man in die übliche geometrische Reihe $z^{-1}$ einsetzt.

Für $|z| > 1$ gilt:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}.$$

Die übliche geometrische Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}$ ist eine Entwicklung in der Einheitkreisscheibe um den Enwicklungspunkt 0.

Beider Transformation $z \mapsto z^{-1}$ wird das **Innere** der Einheitskreisscheibe auf das **Äußere** abgebildet und das Bild des Nullpunktes liegt im Unendlichen. Man spricht daher bei der obigen Laurententwicklung von einer **Entwicklung um den Punkt** $\infty$.