5 Uneigentliche Integrale

5.1 Uneigentliche Integrale

Ziel (uneigentliche Integrale)

Zu einer Regelfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I bilde man eine Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ (vgl. Definition 3.1.4)

Wenn einer der Endpunkte des Intervalls nicht zu I gehört, fragt man nach dem Grenzwert von F in diesem Endpunkt.

Man schreibt diesen Grenzwert suggestiv als Integral:

Beispiele (uneigentliche Integrale)

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt := \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}(e^0 - e^{-x}) = 1,$$
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt := \lim_{x\downarrow 0}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\downarrow 0}\left(2 - 2\sqrt{t}\,\right) = 2.$$

Bemerkung (uneigentliche Integral – Reihen).

Oft kann man den Grenzwert eines uneigentlichen Integrals nicht direkt angeben.

Die Methoden für die Konvergenzuntersuchung von Reihen kann man weitgehend auf uneigentliche Integrale übertragen:

- Cauchy-Kriterium
- positive Integranden und monotone Konvergenz
  - Majorantenkriterium
- absolut konvergente uneigentliche Integrale
- Parameterintegrale
  - gleichmäßige Konvergenz
  - Vertauschung von Ableitung und Integral, Doppelintegrale

Bemerkung (eigentliche – uneigentliche Integrale)

1. Welche Integrale *“uneigentlich“* sind, hängt von der verwendeten Integrationstheorie ab. Die Integrale der zugrunde liegenden Integrationstheorie nennt man zur Unterscheidung auch *eigentliche* Integrale.

Wir haben im Kapitel 3.1 das Regel-Integral eingeführt. In diesem Text sind die **eigentlichen** Integrale also die **Regel-Integrale**.

2. Man teilt die uneigentlichen Integrale in **absolut konvergente** und **nicht** absolut konvergente ein.

Im Rahmen der wesentlich stärkeren **Lebesgueschen** Integrationstheorie sind alle absolut konvergenten uneigentlichen Integrale *eigentlich*, aber alle nicht absolut konvergenten uneigentlichen Integral sind auch dort uneigentlich.

Dies erklärt, warum die **absolut konvergenten** uneigentlich Integrale **viel bessere Eigenschaften** haben.

Bezeichnung 5.1.1 (uneigentliche Integrale)

Es seien I ein nichtleeres Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Man definiert das **uneigentliche Integral von f über I** in den folgenden Fällen, sofern der angegebene Grenzwert existiert (siehe auch den weiteren Fall 5.1.5):
:

1. ***I* beschränkt:**

   (i) $I = (a, b]$. Man bilde den Grenzwert

   $$\int_a^b f(\xi)\, d\xi := \lim_{x \downarrow a} \int_x^b f(\xi)\, d\xi$$

   (ii) $I = [a, b)$. Man bilde den Grenzwert

   $$\int_a^b f(\xi)\, d\xi := \lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

   (iii) $I = (a, b)$. **Siehe Punkt** (3.)

2. ***I* unbeschränkt:**

   (i) $I = [a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Man bilde den Grenzwert

   $$\int_a^\infty f(\xi)\, d\xi := \lim_{x \to \infty} \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

   (ii) $I = (-\infty, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$. Man bilde den Grenzwert

   $$\int_{-\infty}^b f(\xi)\, d\xi := \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(\xi)\, d\xi$$

   (iii) I $= (-\infty, b)$ oder $I = (a, \infty)$ oder $I = (-\infty, \infty)$. **Siehe Punkt** (3.)

---

3. **$I = (a, b)$ mit a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$:**

   Man wähle ein $x_0 \in (a, b)$ und bilde die uneigentlichen Integrale über die beiden **Teilintervalle** $(a, x_0]$ und $[x_0, b)$.

Wenn **beide** uneigentlichen Integrale über $(a, x_0]$ und $[x_0, b)$ konvergieren, setze man

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi := \int_a^{x_0} f(\xi)\, d\xi + \int_{x_0}^b f(\xi)\, d\xi$$

Dies ist **wohldefiniert**:

Wenn die uneigentlichen Integrale über $(a, x_0]$ und $[x_0, b)$ konvergieren, konvergieren die entsprechenden Integrale für jeden **anderen Teilpunkt** $x_1 \in (a, b)$ ebenfalls und man erhält für das uneigentliche Integral über (a, b) dasselbe Ergebnis.
(vgl. Intervalladditivität des Integrals 3.1.1 (2.)).

Bemerkung (zur Fallunterscheidung in 5.1.1).
Man kann in der Typeinteilung 5.1.1 uneigentlicher Integrale kürzer zusammenfassen zu:

- $I = [a, b)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \overline{\mathbb{R}}$,
- $I = (a, b]$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ und $b \in \mathbb{R}$,
- $I = (a, b)$ mit $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Man beachte aber:

Die üblichen ε-Formulierungen der Grenzwertkriterien unterscheiden sich für beschränkte und unbeschränkte Intervalle:

Man vergleiche hierzu

- Kriterien 2.3.5 und 2.3.16 für $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$,
- Kriterium 2.3.14 für $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und das Cauchykriterium hierzu (vgl. Bemerkung (2.) zu 2.3.16).

Bezeichnung 5.1.2 (weitere Bez. für uneig. Integrale) Wenn man betonen will, daß es sich um ein uneigentliches Integral handelt, sind folgende Bezeichnungen üblich:

Für ein beschränktes Intervall mit linkem Endpunkt a und rechtem Endpunkt b:

$$\int_{a+}^b f(x)\, dx = \int_{\downarrow a}^b f(x)\, dx,$$
$$\int_a^{b-} f(x)\, dx = \int_a^{\uparrow b} f(x)\, dx.$$

Eine neutrale Bezeichnung, die nicht über die Lage von a und b voraussetzt, ist

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx.$$

Bemerkung (kompaktes Intervall).

Das Integral einer Regelfunktion f über ein kompaktes Intervall $[a,b]$ stimmt mit den uneigentlichen Integralen über $(a,b]$, $[a,b)$ und (a,b) überein. Die Bezeichnung

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

führt also nicht zu Mehrdeutigkeiten.

Beispiel

Die Funktion $f : [0,1] \ni x \mapsto (1-x)^{\frac{3}{2}}$ ist auf $(0,1)$ differenzierbar mit Ableitung $f' : x \mapsto -\frac{3}{2}\sqrt{1-x}$. Die Funktion $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{1-x}$ ist auf $[0,1]$ erklärt und stetig. Die Formel

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = -\int_0^1 \tfrac{3}{2}\sqrt{1-x}\,dx$$

ist bei jeder Interpretation der rechten Seite richtig.

Beweis. Nach Feststellung 3.1.5 ist jede Stammfunktion einer beschränkten Regelfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L := \sup_{x\in I} |f(x)|$.

Nach Korollar 2.8.18 ist eine Regelfunktion auf einem kompakten Intervall beschränkt. Also ist jede Stammfunktion auf ganz $[a,b]$ erklärt und Lipschitz-stetig.

Die Stammfunktion ist also durch ihre Werte auf einer dichten Teilmenge eindeutig bestimmt (vgl. 3.4.124).

Beispiel ($\arcsin 1 = \pi/2$).

Die Funktion

$$\arcsin : [0,1] \to [0,\pi]$$

ist stetig und im Inneren von $[0,1]$ stetig differenzierbar. Die Ableitung ist aber unbeschränkt auf $(0,1)$. (vgl. 3.3.25 und die folgenden Beispiele).

Für das unbestimmte Integral der Ableitung über $(0,1)$ erhält man also:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &:= \lim_{x\uparrow 1} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \lim_{x\uparrow 1} \Big[\arcsin t \Big|_0^x \\ &= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Beispiele 5.1.3 Das uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Beweis. Nach Definition 3.4.20 des Arcus-Tangens und mit Beispiel 3.4.21(3.) gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{x\to\infty} \arctan\xi\Big|_0^x = \frac{\pi}{2},\\ \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{x\to-\infty} \arctan\xi\Big|_x^0 = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Bemerkung. Mit der Definition 3.4.46 kann man uneigentliche Integrale für komplexwertiger Funktionen bilden.

Beispiele 5.1.4 (Laplace-Transformierte von cos, sin)
Für $w = u + iv \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re} w = u > 0$ gilt:

$$\int_0^{\infty} \exp(-wt)\,dt = \frac{1}{w}\,.$$

Zerlegt man diese Gleichung in Real- und Imaginärteil und setzt $s+i\omega := u+iv$, so erhält man die **Laplace-Transformierten** der harmonischen Schwingunhgen: $t \mapsto \cos\omega t$ und $t \mapsto \sin\omega t$:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t\,dt &= \frac{s}{s^2+\omega^2}\\ \int_0^{\infty} e^{-st}\sin\omega t\,dt &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}\right. \qquad \text{für } s > 0 \text{ und } a \in \mathbb{R}.$$

Beweis (Laplace-Transformierte von cos, sin).
Nach Feststellung 3.4.48 gilt für $w = u + iv \in \mathbb{C}$ und $u < 0$:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\int_0^t \exp(-(u+iv)\tau)\,d\tau\\ &\quad= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{u+iv}\exp(-(u+iv)\tau)\right|_{\tau=0}^{\tau=t}\\ &\quad= \frac{-1}{u+iv}\cdot\lim_{t\to\infty}\big(e^{-ut}\exp(-ivt)-1\big) = \frac{1}{u+iv}\,.\end{aligned}$$

Man beachte:

Für $u > 0$ ist der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-ut} = 0$.

Der Faktor $\exp(-ivt)|$ ist beschränkt:

$$|\exp(-ivt)| = 1.$$

Beispiel (Cauchyscher Hauptwert im Fall 5.1.1 (3.)).

Im Fall 5.1.1 (3.) eines uneigentlichen Integrals über ein offenes Intervall ist es wichtig, daß die Grenzwerte an den beiden Enden **unabhängig** gebildet werden.

$$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \int_0^x \tan\xi \, d\xi = \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \Big[-\log\cos\xi \Big|_0^x = \infty.$$

$$\lim_{x\downarrow-\frac{\pi}{2}} \int_0^x \tan\xi \, d\xi = \lim_{x\downarrow-\frac{\pi}{2}} \Big[-\log\cos\xi \Big|_x^0 = -\infty.$$

Das uneigentliche Integral über $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ existiert nicht.

Bildet man die Grenzwerte aber symmetrisch, so erhält man:

$$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \int_{-x}^x \tan\xi \, d\xi = \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \underbrace{\Big[-\log\cos\xi \Big|_{-x}^x}_{=0} = 0.$$

Bei dieser Kopplung der Grenzwerte spricht man vom **Cauchyschen Hauptwert** des Integrals.

Bezeichnung 5.1.5 (Singularität im Innern)

Ein weitere Fall, den man als ein uneigentliches Integral bezeichnet, entsteht bei einer **Singularität im Innern** eines Intervalls.

Gegeben seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und eine Regelfunktion

$$f : [a,b) \cup (b,c] \to \mathbb{R}.$$

Sofern die uneigentlichen Integral über $[a,b)$ und $(b,c]$ existieren (vgl. 5.1.1), definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_a^c f(x)\,dx := \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Analog geht man im Fall $(a,b) \cup (b,c)$ und bei endlich vielen Singularitäten im Innern eines Intervalls vor.

Beispiel (Singularität im Innern).

Für $0 < t < 1$ konvergiert das uneigentliche Integral:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^t}\,dx = \frac{2}{1-t}\,.$$

Beweis:

$$\lim_{x\uparrow 0}\int_{-1}^{x}\frac{1}{|\xi|^t}\,d\xi = \lim_{x\uparrow 0}\Big[-\frac{|\xi|^{1-t}}{1-t}\Big|_{\xi=-1}^{\xi=x} = \frac{1}{1-t},$$
$$\lim_{x\downarrow 0}\int_{x}^{1}\frac{1}{\xi^t}\,d\xi = \lim_{x\downarrow 0}\Big[\frac{\xi^{1-t}}{1-t}\Big|_{\xi=x}^{\xi=1} = \frac{1}{1-t}.$$

Beispiel (Cauchyscher Hauptwert im Fall 5.1.5).

Im Fall 5.1.5 eines uneigentlichen Integrals mit einer Singularität im Innern des Intervall ist es wichtig, daß der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert **unabhängig** gebildet werden.

$$\lim_{x\downarrow 0}\int_{x}^{1}\frac{1}{\xi}\,d\xi = \lim_{x\downarrow 0}\Big[\log\xi\Big|_{x}^{1} = \infty.$$
$$\lim_{x\uparrow 0}\int_{-1}^{x}\frac{1}{\xi}\,d\xi = \lim_{x\uparrow 0}\Big[\log|\xi|\Big|_{-1}^{x} = -\infty.$$

Das uneigentliche Integral über $[-1,0)\cup(0,1]$ existiert nicht.

Bildet man die Grenzwerte aber symmetrisch, so erhält man:

$$\lim_{x\downarrow 0}\Big[\int_{-1}^{-x}\frac{1}{\xi}\,d\xi + \int_{x}^{1}\frac{1}{\xi}\,d\xi = \lim_{x\downarrow 0}\Big(\underbrace{\log|\xi|\Big|_{-1}^{-x} + \log\xi\Big|_{x}^{1}}_{=0}\Big) = 0.$$

Bei dieser Kopplung der Grenzwerte spricht man vom **Cauchyschen Hauptwert** des Integrals.

Bemerkung 5.1.6 (Rechenregeln für uneigt. Integr.)

1. **Linearität**: Konvergente uneigentliche Integrale kann man addieren und mit einer Zahl multiplizieren (vgl. 3.1.16 (2.)).

2. **Monotonie** Uneigentliche Integrale sind monoton (vgl. 3.1.1 (2.))

3. Die Beschränktheit (vgl. 3.1.17 (1.)) macht für uneigentliche Integrale keinen Sinn, da i.a. das Integrationsintervall oder der Integrand unbeschränkt ist.

Die Folgerung 3.1.17 (2.)zur Vertauschung von Integral und Grenzübergang bei gleichmäßiger Konvergenz gilt nicht mehr:

Beispiel: Die Folge $f_n : x \mapsto \frac{n}{n^2+x^2}$ für $x\in\mathbb{R}$, $(n\in\mathbb{N})$, konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Es ist aber (vgl. Bsp 5.1.3):

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } n\in\mathbb{N}.$$

Bemerkung 5.1.7 (Partielle. Integration uneig. Int.)

Konvergente uneigentliche Integrale kann man partiell integrieren (vgl. Satz 3.1.34).

Gegeben seien $f,\, g \in \mathcal{R}([a,b))$ und Stammfunktionen F von f und G von g.

Dann gilt:

Das uneigentliche Integral auf linken Seite existiert genau dann, wenn der Grenzwert auf der rechten Seite existiert:

$$\int_a^b F(\xi)g(\xi)\,d\xi = \lim_{x\uparrow b}\Big(F(\xi)G(\xi)\,\Big|_a^x - \int_a^x f(\xi)G(\xi)\,d\xi\Big)$$

Bemerkung. Statt 5.1.7 zu benutzen, ist es meist einfacher, erst partiell zu integrieren und anschließend den Grenzwert zu bilden.

Bemerkung. Man vergleiche das folgende Beispiel mit Beispiel 5.1.4.

Beispiele 5.1.8 (partielle Integration)

Durch partielle Integration zeigt man:

Für $s > 0$ konvergieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt = \frac{1}{s^2+1}\,,$$
$$\int_0^\infty e^{-st}\cos t\,dt = \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Durch partielle Integration folgt das eine uneigentliche Integral aus dem anderen.

Beweis. Es sei $s > 0$. Zweimalige partielle Integration ergibt:

$$\int_0^t e^{-s\tau}\sin\tau\,d\tau = -\frac{1}{s}\underbrace{\Big[e^{-s\tau}\sin\tau\Big|_0^t}_{\to 0 \ \text{für } t\to\infty} + \frac{1}{s}\int_0^t e^{-s\tau}\cos\tau\,d\tau \qquad (\star)$$

$$= -\frac{1}{s}\underbrace{\Big[e^{-s\tau}\sin\tau\Big|_0^t}_{\to 0 \ \text{für } t\to\infty} - \frac{1}{s^2}\underbrace{\Big[e^{-s\tau}\cos\tau\Big|_0^t}_{\to -1 \ \text{für } t\to\infty} - \frac{1}{s^2}\int_0^t e^{-s\tau}\sin\tau\,d\tau.$$

Für $t \to \infty$ folgt:

$$\Big(1+\frac{1}{s^2}\Big)\int_0^t e^{-s\tau}\sin\tau\,d\tau \to \frac{1}{s^2},$$
$$\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt = \frac{1}{s^2+1}\,.$$

Hieraus folgt wie in ($\star$) durch partielle Integration:

$$\int_0^\infty e^{-st} \cos t \, dt = s \cdot \frac{1}{s^2+1} \,.$$

Bemerkung: Uneigentliche Integrale mit stetigem Integranden $f : I \to \mathbb{R}$ kann man wie im Satz 3.1.47 transformieren:

Bemerkung 5.1.9 (Transformation uneigent. Integr.)

Es seien $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, $g > 0$, G eine Stammfunktion von g und $f : [G(a), G(b-)) \to \mathbb{R}$ **stetig**.

Wenn eines der beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten oder linken Seite der Gleichung

$$\int_{G(a)}^{G(b-)} f(y) \, dy = \int_a^b f(G(x)) \cdot g(x) \, dx,$$

konvergiert, dann konvergiert auch das andere und es gilt die Gleichheit.

Bemerkung. Statt 5.1.9 zu benutzen, ist es meist einfacher, erst zu Substituieren und anschließend den Grenzwert zu bilden.

Beweis (Transformation uneigentlicher Integrale).

Da $g > 0$, ist die Stammfunktion G streng monoton wachsend. Es existiert in $\overline{\mathbb{R}}$ der Grenzwert $G(b-)$.

Für $a \leqslant x < b$ gilt nach Satz 3.1.47

$$\int_{G(a)}^{G(x)} f(\eta) \, d\eta = \int_a^x f(G(\xi)) \cdot g(\xi) \, d\xi.$$

Da die Stammfunktion G stetig und streng monoton wachsend ist, konvergiert nach Korollar 2.5.18 und Satz 2.3.29 die linke Seite

$$\lim_{y \uparrow G(b-)} \int_{G(a)}^{G(x)} f(\eta) \, d\eta$$

genau dann, wenn die rechte Seite

$$\lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(G(\xi)) \cdot g(\xi) \, d\xi$$

konvergiert und die Grenzwerte sind gleich.

Beispiel (Substitution)

1. Mit der **Substitution** $x := \sin t, \quad dx = \cos t\, dt$ erhält man:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi.$$

Durch die Substitution erhält man sogar ein eigentliches Integral.

2. Aus Beispiel 5.1.8 folgt für $\omega > 0$ mit der **Substitution** $t = \frac{\tau}{\omega}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t\, dt &= \frac{1}{\omega} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\omega}\tau} \sin \tau\, d\tau \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{s}{w}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Da die Sinus-Funktion ungerade ist, gilt die Formel auch für $\omega \leqslant 0$ (vgl. auch Beispiel 5.1.4).

5.2 Konvergenzkriterien

Bemerkung. Das folgende Kriterium ist ein Spezialfall des Majorantenkriteriums 5.2.7:

Bemerkung 5.2.1 (beschr. Fnkt auf beschr. Interv.)

Es seien I ein **beschränktes**, nicht kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine **beschränkte** Regelfunktion.

1. Das uneigentliche Integral über I konvergiert.

2. Für $I = (a, b]$ stimmt das uneigentliche Integral über $[a, b)$ mit dem uneigentlichen Integral über (a, b) überein. Die Bezeichnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

führt also nicht zu Mehrdeutigkeiten.

3. Analoge Aussagen gelten für $I = (a, b]$ bzw. $I = (a, b)$.

Beweis (beschr. Funktion auf beschr. Intervall).

Nach Feststellung 3.1.5 ist jede Stammfunktion einer beschränkten Regelfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante

$$L := \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Man kann nun den Satz 3.4.124 über die Forsetzung gleichmäßig stetiger Funktionen anwenden. Also existieren die Grenzwerte in den Endpunkten des Intervalls.

Bemerkung (Cauchy-Kriterium für uneig. Integrale).

Bei dem Cauchykriterium für uneigentliche Integrale handelt es sich um eine Umformulierung des Cauchykriteriums 2.3.16 für Funktionen.

Für eine Regelfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ wende man das Cauchy-Kriterium auf eine Stammfunktion F an und beachte:

$$\int_x^y f(\xi)\, d\xi = F(y) - F(x) \quad \text{für } x,\, y \in I.$$

Wir formulieren das Cauchy-Kriterium für den rechten Endpunkt eines Intervalls vom Typ $[a, b)$ bzw. $[a, \infty)$.

Eine analoge Formulierung gilt für den linken Endpunkt von $(a, b]$ bzw. $(-\infty, b]$.

Satz 5.2.2 (Cauchy-Krit. für uneigentl. Int.)

Es seien $I = [a, b)$ nichtleer und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Es existiert das uneigentliche Integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.
2. **Fall $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$:** *Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle x, $y \in U(b, \delta)$ stets*

   $$\Big| \int_x^y f(\xi)\, d\xi \Big| < \varepsilon$$

   gilt.

   Fall $\boldsymbol{b = \infty}$: *Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein K mit $a \leqslant K < \infty$, so daß für alle x, $y \in \mathbb{R}$ mit $K \leqslant x < y$ stets*

   $$\Big| \int_x^y f(\xi)\, d\xi \Big| < \varepsilon$$

   gilt.

Bemerkung (Cauchy-Krit. für uneigentl. Int.)

Man kann in Satz 5.2.2 die Cauchy-Bedingung für die beiden Fälle $I = [a, b)$ mit $b \in \mathbb{R}$ bzw $b = \infty$ einheitlich formulieren:

> *Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein K mit $a \leqslant K < \infty$, so daß für alle x, $y \in \mathbb{R}$ mit $K \leqslant x < y < b$ stets*
>
> $$\Big| \int_x^y f(\xi)\, d\xi \Big| < \varepsilon$$
>
> *gilt.*

Beispiele 5.2.3

Wir zeigen später, daß das folgende Integral gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Da $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, reicht es, das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ zu untersuchen (vgl. Bemerkung 5.2.1).

Partielle Integration ergibt:

$$\int_x^y \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = -\frac{\cos\xi}{\xi}\Big|_x^y - \int_x^y \frac{\cos\xi}{\xi^2}\,d\xi.$$

Da $|\cos\xi| \leqslant 1$, folgt für $1 \leqslant x < y < \infty$:

$$\left|\int_x^y \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \int_x^y \frac{1}{\xi^2}\,d\xi = \frac{2}{x} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Also ist die Cauchy-Bedingung 5.2.2 (2.) erfüllt.

Feststellung 5.2.4 (nichtnegativer Integrand)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion auf dem Intervall I und

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(\xi)\,d\xi \quad \text{für } x \in I$$

eine Stammfunktion, wobei x_0 ein beliebiger, fest gewählter Punkt in I ist.

Es sei $f \geqslant 0$. Dann sind äquivalent:

1. *Das uneigentliche Integral von f über I konvergiert in $\mathbb{R}$.*
2. *Die Stammfunktion F ist beschränkt auf I.*

Wenn das uneigentliche Integral von f über I nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergiert es gegen ∞.

Beweis (nichtnegativer Integrand).

Da der Integrand $f \geqslant 0$ ist, ist die Stammfunktion F monoton wachsend.

Es seien $a < b$ die Intervallenden von I, dann gilt:

$$\lim_{x\downarrow a} F(x) = \inf_{x\in I} F(x) \leqslant F \leqslant \sup_{x\in I} F(x) = \lim_{x\uparrow b} F(x).$$

Die Grenzwerte von F an den Intervallenden existieren genau dann in R, wenn f beschränkt ist.

Bezeichnung 5.2.5 (nichtnegativer Integrand)

Es seien I ein Intervall mit Endpunkten a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine **nichtnegative** Regelfunktion.

1. Entsprechend der Definition 2.1.22 bezeichnen wir auch bei **uneigentlicher** Konvergenz des unbestimmten Integrals den Grenzwert mit:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \infty.$$

2. Im Fall eigentlicher Konvergenz schreiben wir zur Betonung:

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty.$$

Beispiele 5.2.6 (nichtnegativer Integrand)

Es sei $c \in R$. Für das uneigentliche Integral von x^{-c} gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^c}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{c-1} & \text{für } c > 1, \\ \infty & \text{für } c \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^c}\,dx = \begin{cases} \infty & \text{für } c \geqslant 1. \\ \dfrac{1}{1-c} & \text{für } c < 1. \end{cases}$$

Also ist für alle $x \in \mathbb{R}$ stets

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^c}\,dx = \infty.$$

Feststellung 5.2.7 (Majorantenkriterium)

Es seien $I = [a, b)$ ein nichtleeres Intervall und f, $g : I \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen. Ist $|f| \leqslant g$ und konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty,$$

dann konvergieren auch die uneigentlichen Integrale von f und $|f|$ und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Man nennt g eine ***Majorante*** *von f.*

Beweis (Majorantenkriterium).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium.

Bezeichnung 5.2.8 (absolut konvergentes uneig. Int.)

Es seien $I = [a, b)$ nicht leer und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

Das uneigentliche Integral von f über I heißt **absolut konvergent**, wenn

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < \infty.$$

Nach dem Majorantenkriterium 5.2.7 konvergiert in diesem Fall das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

und es gilt

$$\Big| \int_a^b f(x)\, dx \Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Beispiele 5.2.9 (konv. nicht abs. kon. uneigtl. Int.)

Nach Beispiel 5.2.3 konvergiert das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Es ist aber **nicht absolut** konvergent.

Man kann gegen die harmonische Reihe 1.4.11 abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_0^n \Big| \frac{\sin x}{x} \Big|\, dx &\geqslant \sum_{\nu=1}^n \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \Big| \frac{\sin x}{\nu} \Big|\, dx \\ &= 2 \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} \to \infty \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Also ist $\displaystyle\int_0^\infty \Big| \frac{\sin x}{x} \Big|\, dx = \infty.$

Satz 5.2.10 (Grenzwertkriterium)

Es seien $I = [a, b)$ nicht leer und $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen.

1. *Wenn*
$$\limsup_{x\to b}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$
ist, dann gilt:
Wenn $\int_a^b |g(x)|\,dx < \infty$, *so ist auch* $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$.

2. *Wenn der folgende Grenzwert existiert und*
$$0 < \lim_{x\to b}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$
ist, dann gilt:
$\int_a^b |g(x)|\,dx < \infty$ *genau dann, wenn* $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$.

Beweis (Grenzwertkriterium).

1. Es sei $s = \limsup\limits_{x\to b}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in [a,b)$, so daß
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < s+\varepsilon \quad \text{für } x \in [x_0, b).$$
Nach dem Majorantenkriterium 5.2.7 folgt:
$$\int_{x_0}^b |f(x)|\,dx \leqslant (s+\varepsilon)\int_{x_0}^b |g(x)|\,dx < \infty.$$
2. klar nach Teil (1.).

Beispiele 5.2.11 (Grenzwertkriterium)
$$\int_1^2 \frac{1}{\log x}\,dx = \infty.$$
Beweis. Nach Definition der Ableitung gilt
$$\lim_{x\downarrow 1}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\log x - \log 1}{x-1} = (\log x)'\big|_{x=1} = 1.$$
Da
$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = -\lim_{x\downarrow 1}\log(x-1) = \infty$$
ist, folgt das Resultat aus dem Grenzwertkriterium 5.2.10 (2.).

Bemerkung. Man kann auch die Abschätzung (vgl. 3.1.29 (3.))

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \log x \leqslant x-1 \quad \text{für } x \in (0,\infty).$$

und das Majorantenkriterium 5.2.7 benutzen.

Bemerkung (Reihen als uneigentliche Integrale).
Zu einer Reihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ bilde man die stückweise konstante Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) := a_n \qquad \text{für } x \in [n, n+1) \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für die **Stammfunktion**

$$F : [0,\infty) \ni x \mapsto \int_0^x f(\xi)\, d\xi$$

ist $F(n)$ gleich der **Partialsumme** $\sum_{\nu=0}^{n} a_n$.
Konvergiert das uneigentliche Integral so gilt

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Konvergiert die Reihe gegen c, so auch das uneigentliche Integral. Denn für $n \leqslant x \leqslant n+1$ ist

$$|F(x) - F(n)| = \left| \int_n^x f(x)\, dx \right| \leqslant |a_n| \to 0.$$

Bemerkung. Anders als bei konvergenten unendlichen Reihen muß bei einem konvergenten uneigentlichen Integral vom Typ

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

der Integrand für $x \to \infty$ nicht gegen Null streben.

Beispiele 5.2.12 (Integrand geht nicht gegen Null)
Das folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\, dx = 2 \int_1^\infty y \sin(y^4)\, dy.$$

Es ist

$$\limsup_{x\to\infty} |\sin(x^2)| = 1, \quad \limsup_{y\to\infty} |y \cdot \sin(y^4)| = \infty.$$

Man veranschauliche die Integranden mit einer Zeichnung!

Beweis (Integrand geht nicht gegen Null).

Man substituiere $\xi = \sqrt{\eta}$ und integriere partiell:

$$\int_x^y \sin \xi^2 \, d\xi = \int_{x^2}^{y^2} \frac{\sin \eta}{2\sqrt{\eta}} \, d\eta$$

$$= -\frac{\cos \eta}{2\sqrt{\eta}} \bigg|_{x^2}^{y^2} - \int_{x^2}^{y^2} \frac{\cos \eta}{4\eta^{\frac{3}{2}}} \, d\eta$$

Da $|\cos \xi| \leqslant 1$, folgt für $1 \leqslant x < y < \infty$:

$$\left| \int_x^y \sin(\xi^2) \, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \int_{x^2}^{y^2} \frac{1}{4\eta^{\frac{3}{2}}} \, d\eta$$

$$= \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Also ist die Cauchy-Bedingung 5.2.2 (2.) erfüllt.

Die Substituion $x = y^2$ ergibt das zweite Integral.

Bemerkung (Bild zum Integralkriterium).

Wenn der Integrand $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eines uneigentlichen Integrals nichtnegativ ist und monoton fällt, kann man das Integral gut mit einer Reihe vergleichen:

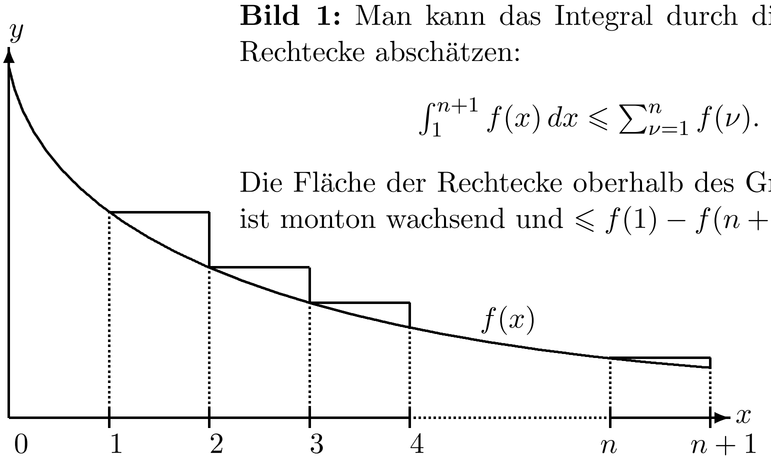

Bild 1: Man kann das Integral durch die Fläche der Rechtecke abschätzen:

$$\int_1^{n+1} f(x) \, dx \leqslant \sum_{\nu=1}^n f(\nu).$$

Die Fläche der Rechtecke oberhalb des Graphen von f ist monton wachsend und $\leqslant f(1) - f(n+1)$.

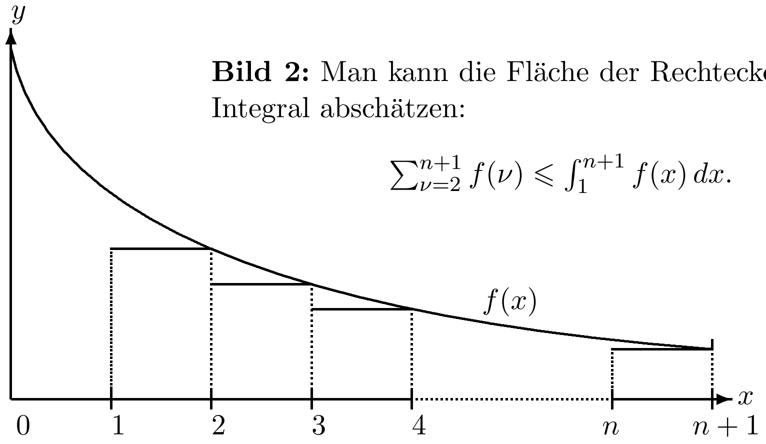

Bild 2: Man kann die Fläche der Rechtecke durch das Integral abschätzen:

$$\sum_{\nu=2}^{n+1} f(\nu) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

Der Vergleich der Rechteckflächen mit dem Integral ergibt insgesamt:

$$\sum_{\nu=2}^{n+1} f(\nu) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu)$$

Satz 5.2.13 (Integralkriterium)

Es sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und monoton fallend.

1. Der ***Vergleich*** *der Reihe $\sum_n f(n)$ mit dem Integral ergibt:*

$$\sum_{\nu=m+1}^{n+1} f(\nu) \leqslant \int_m^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{\nu=m}^{n} f(\nu) \quad \textit{für } m \leqslant n.$$

Insbesondere gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

2: Die Folge der ***Abweichungen***

$$d_n := \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

ist nichtnegativ, monoton wachsend und immer ***konvergent****. Für den Grenzwert gilt:*

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} d_n \leqslant f(1).$$

Beweis (Integralkriterium).

1. Da f monoton fällt, gilt $\quad f(\nu+1) \leqslant f(x) \leqslant f(\nu)$

und folglich $\quad f(\nu+1) \leqslant \displaystyle\int_\nu^{\nu+1} f(x)\,dx \leqslant f(\nu) \quad$ für $\nu \in \mathbb{N}$.

Summiert man diese Ungleichungen von $\nu = m, \dots, n$ so folgt

$$\sum_{\nu=m}^{n} f(\nu+1) \leqslant \int_m^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{\nu=m}^{n} f(\nu).$$

2. Aus (1.) folgt die Behauptung mit:

$$0 \leqslant d_n \leqslant d_n + f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx = d_{n+1},$$

$$\begin{aligned} d_n &:= \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx \\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) - \sum_{\nu=2}^{n+1} f(\nu) = f(1) - f(n+1). \end{aligned}$$

Beispiele 5.2.14 (Zeta-Reihe)

Für die **Zeta-Reihe** $\sum_n n^{-s}$ folgen für $s > 1$ aus dem Integralkriterium die Abschätzungen

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \frac{1}{1^s} + \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{s}{s-1}\,.$$

und

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{s-1} \leqslant 1.$$

Bemerkung (Zeta-Funktion).

Bereits Euler hatte gesehen, daß man die Zeta-Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ als konvergentes unendliches Produkt

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad \text{(für } s > 1)$$

ausdrücken kann, wobei p alle **Primzahlen** durchläuft.

Beispiele 5.2.15 (Eulersche Konstante)

Wendet man das Integralkriterium 5.2.13 (1.) auf die Funktion x^{-1} an, so erhält man eine Abschätzung, wie schnell die harmonische Reihe 1.4.11 gegen ∞ geht:

$$\log(n+1) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \log(n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Nach 5.2.13 (2.) konvergiert die Differenz aus den n-ten Partialsummen der harmonischen Reihe und $\log(n+1)$. Der Grenzwert heißt **Eulersche Konstante**:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log n =: \gamma \approx 0{,}577\ldots$$

Beachte: $\log(n+1) - \log n \to 0$.

Bemerkung (uneigentliche Integrale *als* Reihen).

Für eine Regelfunktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. Das uneigentliche Integral von f über $[0,\infty)$ konvergiert.
2. Für **jede** streng monotone Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ∞ strebt, konvergiert die Reihe (wobei $x_0 = 0$ gesetzt ist):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(\xi)\, d\xi = \lim_{n\to\infty} \int_0^{x_n} f(x)\, dx. \qquad (\star)$$

Übung: Es gebe **eine** solche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß die Einschränkungen $f\big|_{(x_{n-1},\, x_n)}$ alternierende Vorzeichen haben.

Beispiel $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Man zeige: Dann ist für **diese** Folge $(\star)$ eine alternierende Reihe. Wenn diese Reihe konvergiert, konvergiert das uneigentliche Integral.

5.3 Parameterabhängige Integrale

Bemerkung (Funktionenreihen – Parameterintegrale).

Die Theorie der Funktionenreihen und die Darstellung von Funktionen als spezielle Funktionenreihen ist ein wichtiges Hilfmittel zur Untersuchung von Funktionen.

Entsprechend der Analogie zwischen unendlichen Reihen und uneigentlichen Integralen spielen uneigentliche Integrale, deren Integrand von einem Parameter abhängt, eine große Rolle in der Analysis.

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \quad \overset{\text{Analogie}}{\longleftrightarrow} \quad t \mapsto \int_0^\infty f(x,t)\, dx$$

Wir untersuchen zuvor die Abhängigkeit von einem Parameter für eigentliche Integrale.

Bemerkung: (Satz von Arzela-Osgood)

Für die Untersuchung von Grenzprozessen bei uneigentlichen Integralen gehen wir von dem Grenzwertsatz 3.1.17 (2.), für **gleichmäßig konvergente** Folgen von Integranden aus. Da dieses Resultat etwas schwach ist, müssen wir zusätzliche Voraussetzungen über die Stetigkeit der Integranden machen.

Schärfere Rsultate erhält man mit dem Grenzwertsatz von Arzela-Osgood (vgl. [**?**]).

Satz (Arzela-Osgood). *Es sei $(f_n)_n$ eine Folge von Regelfunktionen auf $[a,b]$, die beschränkt sind $f_n \leqslant c$ und* ***punktweise*** *gegen eine Regelfunktion f konvergieren Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dies ist ein Spezialfall des Grenzwertsatzes von Lebesgue. Wir werden die folgenden Resultate später im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie allgemeiner herleiten.

Satz 5.3.1 (Stetige Abhängigkeit vom Parameter)

Es seien $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall, (M,d) kompakter metrischer Raum (vgl. 3.4.93) und $f : I \times M \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist die durch

$$\Phi : t \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dx$$

definierte Funktion $\Phi : M \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Beweis (Stetige Abhängigkeit vom Parameter).

Nach Satz 3.4.118 ist die stetige Funktion f auf der kompakten Menge $[a,b] \times M$ gleichmäßig stetig.

Folglich gibt es zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|} \quad \text{für } t_1,\ t_2 \in M \text{ und } d(t_1,t_2) < \delta.$$

Für t_1, $t_2 \in M$ und $d(t_1,t_2) < \delta$ folgt nun nach Regel 3.1.17:

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| = \Big| \int_a^b f(x,t_1)\,dx - \int_a^b f(x,t_2)\,dx \Big| < \varepsilon.$$

Bezeichnung 5.3.2 (partielle Ableitung)

Es seien D eine Menge und J ein nichtleeres, offenes Intervall. Die Funktion

$$f : I \times J \to \mathbb{R}, \qquad f : (x,t) \mapsto f(x,t)$$

heißt im Punkte $(x_0,t_0) \in D \times J$ **partiell differenzierbar** nach der Variablen $t \in J$, wenn der Grenzwert des folgenden Differenzenquotienten existiert:

$$D_2 f(x_0,t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(x_0,t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{f(x_0,t) - f(x_0,t_0)}{t - t_0}.$$

Bemerkung. 1. Die partiellen Ableitung bietet eine einfachere Schreibweise für die übliche Ableitung der Funktion

$$f(x_0,\cdot) : J \to \mathbb{R}, \qquad f(x_0,\cdot) : t \mapsto f(x_0,t),$$

bei der die andere Variable festgehalten wird.

2. Man benutzt die partielle Ableitung auch bei anderer Reihenfolge der Variablen.

Beispiele 5.3.3 (partielle Ableitungen)

1. $\frac{\partial}{\partial t}\sin(x^2+t^2) = \cos(x+t)\cdot 2t.$
2. $\frac{\partial}{\partial t}\sin(x\cdot t) = \cos(x\cdot t)\cdot x.$
3. $\frac{\partial}{\partial t}\sin(x^t) = \cos(x^t)\cdot x^t\log x.$
4. Mit Hilfe des Additionstheorems erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\int_0^1 \sin(x^2+t^2)\,dx \\
&\qquad = \frac{d}{dt}\int_0^1 \sin x^2\cdot\cos t^2\,dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 \cos x^2\cdot\sin t^2\,dx \\
&\qquad = -\sin t^2\cdot 2t\int_0^1 \sin x^2\,dx + \cos t^2\cdot 2t\int_0^1 \cos x^2\,dx \\
&\qquad = \int_0^1 \cos(x^2+t^2)\cdot 2t\,dx = \int_0^t \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t}}\sin(x^2+t^2)\,dx.
\end{aligned}$$

Wir werden sehen, das dieses Ergebnis allgemeiner gilt.

Lemma 5.3.4 (gleichmäßig partiell differenzierbar)
Es seien $I=[a,b]$ ein kompaktes Intervall und J ein nichtleeres offenes Intervall. Die Funktion

$$f : I\times J \to \mathbb{R}, \qquad f : (x,t) \mapsto f(x,t)$$

sei auf $I\times J$ ***partiell*** *nach der Variablen t* ***differenzierbar*** *und die partielle Ableitung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} : I\times J \to \mathbb{R}$$

sei ***stetig****. Dann konvergieren die Differenzenquotienten*

$$\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}$$

gleichmäßig *für $x\in I$ gegen die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}f(x,t_0)$.*

Bezeichnung. Man sagt in diesem Fall, die Funktion f ist im Punkte t_0 **gleichmäßig partiell differenzierbar**.

Beweis (gleichmäßig partiell differenzierbar).

Zu $t_0 \in J$ wähle ein kompaktes Intervall $[c, d]$, so daß $t_0 \in (c, d) \subset [c, d] \subset J$ ist.

$\frac{\partial f}{\partial t}$ ist auf der kompakten Menge $I \times [c, d]$ gleichmäßig stetig (vgl. 3.4.118):

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $U(t_0, \delta) \subset [c, d]$ ist und für alle $x \in I$ und $\tau \in U(t_0, \delta)$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \tau) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| < \varepsilon$$

ist. Aus dem Mittelwertsatz folgt: Es gibt zu $x \in I$ und $t \in U(t_0, \delta)$ ein τ_x zwischen t und t_0, so daß:

$$\left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \tau_x) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| < \varepsilon.$$

Satz 5.3.5 (Vertauschung von Integral u. Ableitung)

Es seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und J ein nichtleeres offenes Intervall. Die Funktion

$$f : I \times J \to \mathbb{R}, \qquad f : (x, t) \mapsto f(x, t)$$

*sei stetig, **partiell** nach der Variablen t **differenzierbar** und die partielle Ableitung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} : I \times J \to \mathbb{R}$$

*sei **stetig**. Dann ist die Funktion*

$$\Phi : J \to \mathbb{R}, \qquad \Phi : t \mapsto \int_a^b f(x, t)\, dx$$

stetig differenzierbar und es gilt:

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\, dx.$$

Beweis (Vertauschung von Integral u. Ableitung).

Nach Lemma 5.3.4 ist f gleichmäßig auf I nach der Variablen t partiell differenzierbar.

Für eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in J, die gegen t_0 konvergiert, konvergieren die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \to \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0)$$

gleichmäßig für $x \in I$ gegen die partielle Ableitung.

Nach der Grenzwertregel 3.1.17 (2.) folgt nun

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(t_n) - \Phi(t_0)}{t_n - t_0} &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}\, dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0)\, dx.\end{aligned}$$

Also ist Φ differenzierbar.

Beispiele 5.3.6 (Vertausch. von Integral u. Ableit.)

Die Funktion $f : [0, 1] \times [0, \infty)$ mit

$$f(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{x^t - 1}{\log x} & \text{für } 0 < x < 1, \\ t & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

ist stetig (vgl. 3.2.21) und hat die stetige partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x.t) = x^t \text{für } (x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty).$$

Also ist $\Phi(t) := \int_0^1 f(x, t)\, dx$ stetig auf $[0, \infty)$, stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$ und es gilt

$$\Phi'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\, dx = \int_0^1 x^t\, dx = \frac{1}{1 + t}\,.$$

Φ ist eine Stammfunktion. Da $\Phi(0) = 0$ ist folgt

$$\Phi(t) = \log(1 + t).$$

Bezeichnung 5.3.7 (Doppelintegral)

Es seien $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ kompakte Intervalle. Die Funktion

$$f : I \times J \to \mathbb{R}, \qquad f : (x, t) \mapsto f(x, t)$$

sei stetig. Das Integral der stetigen Funktion (vgl. Satz 5.3.1)

$$\Phi : t \mapsto \int_a^b f(x, t)\, dx$$

bezeichnet man als Doppelintegral:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, t)\, dx\, dt := \int_c^d \Phi(t)\, dt.$$

Bemerkung. Das innere Integralzeichen $\int_a^b$ und das zugehörige Differential dx wie ein Klammerpaar:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,dx \right) dt.$$

Satz 5.3.8 (Vertausch. der Integrationsreihenfolge)
Es seien $I = [a,b]$, $J = [c,d]$ kompakte Intervalle. Die Funktion

$$f : I \times J \to \mathbb{R}, \qquad f : (x,t) \mapsto f(x,t)$$

sei stetig. Für die Integral der stetigen Funktionen

$$\Phi : t \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dx \quad \text{und} \quad \Psi : x \mapsto \int_c^d f(x,t)\,dt$$

gilt

$$\int_c^d \Phi(t)\,dt = \int_a^b \Psi(x)\,dx.$$

Die Reihenfolge der Integration kann bei Doppelintegralen mit stetigem Integranden vertauscht werden:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx.$$

Beweis (Vertausch. der Integrationsreihenfolge).
Wir betrachten auf $[c,d]$ die beiden stetigen Funktionen

$$g : t \mapsto \int_c^t \Phi(\tau)\,d\tau$$
$$h : t \mapsto \int_a^b \left(\int_c^t f(x,\tau)\,d\tau \right) dx$$

Sie haben den gleichen *Anfangswert* $g(c) = h(c) = 0$.

Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist

$$g'(t) = \Phi(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx \quad \text{für } t \in (c,d).$$

Nach Satz 5.3.5 vertauscht die Differentiation mit der Integration und man erhält für $t \in (c,d)$

$$h'(t) = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_c^t f(x,\tau)\,d\tau \right) dx = \int_a^b f(x,t)\,dx.$$

Also ist $g = h$.

Bemerkung 5.3.9 (anderer Beweis für Satz 5.3.8)

Wir gegen noch einen anderen Beweis für die Vertauschung der Integrationsreihenfolge 5.3.8.

Dieser Beweis beruht darauf, daß für Treppenfunktionen, deren Stufen **achsenparalle Rechtecke** sind, das Doppelintegral über zwei Intervalle I und J als eine **Doppelsumme** berechnet wird. In dieser Doppelsumme kann man die Summationsreihenfolge vertauschen.

Anschaulich ergibt das Doppelintegral für eine solche nichtnegative Treppenfunktion f das **Volumen** des Körpers, der nach unten durch das Rechteck $I \times J$ und nach oben durch den Graphen von f begrenzt wird. Dieser Körper besteht aus endlich vielen achsenparallelen **Quadern**.

Für den allgemeinen Fall approximiere man eine stetige Funktion f durch solche Treppenfunktionen.

Approximation durch Treppenfunktionen:

Für m, $n \in \mathbb{N}$ teile man das Intervall $[a, b]$ und das Intervall $[c, d]$ in jeweils n gleiche Teile. Die Teilpunkte sind

$$\begin{aligned} x_k^{(n)} &:= a + \frac{k}{m}(b - a) && \text{für } k = 0, 1, \ldots, n, \\ t_l^{(n)} &:= c + \frac{l}{n}(d - c) && \text{für } l = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Man approximiere f durch die Treppenfunktionen

$$f_n(x, t) := \begin{cases} f(a, c) & \text{für } x = a \text{ und } t = c, \\ f(x_k^{(n)}, t_l^{(n)}) & \text{für } x \in (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}],\ t \in (t_{l-1}^{(n)}, t_l^{(n)}]. \end{cases}$$

Da f auf der kompakten Menge $[a, b] \times [c, d]$ gleichmäßig stetig ist, konvergieren die f_n gleichmäßig auf $[a, b] \times [c, d]$ gegen f (vgl. den Beweis zu Satz 3.1.24):

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{\sup} = 0.$$

Doppelintegral der Treppenfunktionen:

Für diese Treppenfunktionen gilt $(\star)$

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_c^d f_n(x, t)\, dt\, dx \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} f(x_k^{(n)}, t_l^{(n)})(t_l^{(n)} - t_{l-1}^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \\ &\qquad = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}, t_l^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)})(t_l^{(n)} - t_{l-1}^{(n)}) \\ &\qquad = \int_c^d \int_a^b f_n(x, t)\, dx\, dt. \end{aligned}$$

Da die Treppenfunktionen f_n gleichmäßig gegen f konvergieren, folgt aus dem Grenzwertsatz 3.1.17 (2.):

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(x,t)\,dt\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_c^d f_n(x,t)\,dt\,dx \\
\text{(nach } (\star)) \qquad &= \lim_{n\to\infty} \int_c^d \int_a^b f_n(x,t)\,dx\,dt \\
&= \ldots \quad \text{(analoge Umformung)} \\
&= \int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Übung: Man leite den Satz 5.3.5 über die Vertauschung von Integral und Ableitung aus dem Satz 5.3.8 über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge her.

Bezeichnung 5.3.10 (Glm. konv. uneigent. Integrale)
Es seien $I = [a,b)$ ein Intervall und M eine Menge. Wir betrachten eine Funktion

$$f : I \times M \to \mathbb{R} \quad f : (x,t) \mapsto f(x,t),$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes feste $t \in M$ die Funktion $f(\cdot,t) : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion ist.

f heißt **gleichmäßig uneigentlich integrierbar**, wenn für $t \in M$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^b f(x,t)\,dx$ existieren und **gleichmäßig konvergieren** (vgl. Definition 2.8.5):

> *Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in [a,b)$, so daß für **alle** $t \in M$ und $x \in [x_0,b)$*
>
> $$\left| \int_a^b f(\xi,t)\,d\xi - \int_a^x f(\xi,t)\,d\xi \right| < \varepsilon$$
>
> *gilt.*

Bemerkung. Für gleichmäßige Konvergenz gibt es das Cauchy-kriterium 2.8.11, das wir für uneigentliche Integrale nochmal formulieren:

Bemerkung 5.3.11 (Cauchy-Krit. für glm. Konvergenz) Es seien $I = [a,b)$ ein Intervall, M eine Menge und

$$f : I \times M \to \mathbb{R} \quad f : (x,t) \mapsto f(x,t),$$

so daß für jedes $t \in M$ die Funktion $f(\cdot,t) : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion ist. Dann sind äquivalent:

1. *f ist **gleichmäßig** uneigentliche integrierbar.*
2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in [a, b)$, so daß für **alle** $t \in M$ und x, $y \in [x_0, b)$ stets gilt:*

$$\Big|\int_x^y f(\xi, t)\, d\xi\Big| < \varepsilon.$$

Feststellung 5.3.12 (Stetigkeit v. uneig. Param.-Int.)

Es seien $I = [a, b)$ ein Intervall , M kompakter metrischer Raum und $f : I \times M \to \mathbb{R}$ stetig.

*Wenn f **gleichmäßig uneigentlich integrierbar** ist, dann ist die durch*

$$\Phi : t \mapsto \int_a^b f(x, t)\, dx$$

definierte Funktion $\Phi : M \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis (Stetigkeit von uneig. Param.-Int.).

Nach Voraussetzung sind die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^b f(x, t)\, dx$$

gleichmäßig konvergent.

Es sei $(x_n)_n$ eine monoton wachsende Folge in $[a, b)$ die gegen b konvergiert. Nach Satz 5.3.1 sind die Funktionen

$$\Phi_n : t \mapsto \int_a^{x_n} f(\xi, t)\, d\xi$$

stetig. Da die Φ_n gleichmäßig gegen

$$\Phi : t \mapsto \int_a^b f(x, t)\, dx$$

konvergieren, ist die Grenzfunktion Φ nach Satz 2.8.6 stetig.

Beispiele 5.3.13 (glm. uneigentlich integrierbar)

Die Funktion

$$f : (x, t) \mapsto e^{-xt}\, \frac{\sin x}{x} \quad \text{für } (x, t) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$$

ist gleichmäßig uneigentlich integrierbar. Also ist

$$[0, \infty) \ni t \mapsto \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

stetig (siehe auch Beispiel 5.3.23).

Da das uneigentliche Integral für $t = 0$ nicht absolut konvergent ist (vgl. Beispiel 5.2.9), gibt es keine gleichmäßige Majorante für $t \in [0, \infty)$.

Beweis ($\int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx$ ist gleichmäßig konvergent).

Für x, $y \in (1, \infty)$ mit $x < y$ und $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{e^{-\xi t}}{\xi} \sin \xi \, d\xi \\ &= \left[-\frac{e^{-\xi t}}{\xi} \cos \xi \right|_x^y - \int_x^y (\xi t + 1) e^{-\xi t} \frac{\cos \xi}{\xi^2}\, d\xi.\end{aligned}$$

Da $\frac{d}{d\xi}(\xi t + 1)e^{-}\xi t = -\xi t^2 e^{-\xi t} < 0$ ist, ist die Funktion für $\xi \in [0, \infty)$ monoton fallend. Also ist für $t \in [0, \infty)$ und $\xi \in [0, \infty)$

$$0 \leqslant (\xi t + 1) e^{-\xi t} \leqslant 1.$$

Man erhält die gleichmäßige Abschätzung:

$$\left| \int_x^y \frac{e^{-\xi t}}{\xi} \sin \xi \, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \int_x^y \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{2}{x} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Bemerkung (Majorante).

Die gleichmäßige Integrierbarkeit ist im allgemeinen schwierig nachzuweisen.

Für absolut integrierbare Funktionen bietet das Majorantenkriterium 5.2.7 eine gängige Methode, die gleichmäßige Konvergenz von uneigentlichen Integralen zu zeigen.

Dazu schätzt man eine Familie von Funktionen

$$\{f(\cdot, t) \mid t \in M\}$$

mit einer geeignet gewählten, uneigentlich integrierbaren Funktion g ab:

$$|f(\cdot, t)| \leqslant g \quad \text{für } t \in M.$$

Diese **Majorante** g kontrolliert dann, wie die uneigentlichen Integrale von $|f(\cdot, t)|$ konvergieren.

Lemma 5.3.14 (gleichmäßige Majorante)

Es seien M eine Menge und

$$f : [a, b) \times M \to \mathbb{R} \quad f : (x, t) \mapsto f(x, t),$$

eine Funktion, so daß für jedes feste $t \in M$ die Funktion $f(\cdot, t) : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion ist.

Es gebe eine nichtnegative Regelfunktion $g : [a, b) \to \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral über $[a, b)$ konvergiert:

$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty$$

*und die eine **Majorante** von f ist:*

$$|f(x,t)| \leqslant g(x) \quad \text{für } (x,t) \in [a,b) \times M.$$

*Dann ist das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x,t)\,dx$ absolut und gleichmäßig konvergent. f und $|f|$ sind über $[a, b)$ **gleichmäßig uneigentlich integrierbar**.*

Beweis (gleichmäßige Majorante).

Da $\int_a^b g(x)dx < \infty$ ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in [a, b)$, so daß

$$\int_{x_0}^b g(x)\,dx < \varepsilon.$$

Für alle $t \in M$ und x, $y \in [x_0, b)$ mit $x < y$ folgt dann

$$\left|\int_x^y f(\xi,t)\,d\xi\right| \leqslant \int_x^y g(\xi)\,d\xi \leqslant \int_{x_0}^b g(\xi)\,d\xi < \varepsilon.$$

Also ist f gleichmäßig uneigentlich integrierbar.

Nach dem Majorantenkriterium 5.2.7 ist das Integral $\int_a^b f(x,t)\,dx$ absolut konvergent und wie oben folgt, daß auch $|f|$ gleichmäßig uneigentlich integrierbar ist.

Beispiele 5.3.15 (lokal gleichmäßige Majorante)

Die Funktion

$$g : (x,t) \mapsto e^{-xt} \sin x \quad \text{für } (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$$

ist nach Lemma 5.3.14 **lokal** gleichmäßig uneigentlich integrierbar.

Auf dem Intervall $[t_0, \infty)$ kann man abschätzen:

$$\left|\int_0^\infty g(x,t)\,dx\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-xt_0}\,dx = \frac{1}{t_0} < \infty.$$

Satz 5.3.16 (Stetigk. abs. konv. uneig. Param.-Int.)
Es seien $I = [a, b)$ ein Intervall , M kompakter metrischer Raum und $f : I \times M \to \mathbb{R}$ stetig.

Es gebe eine nichtnegative Regelfunktion $g : [a, b) \to \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral über $[a, b)$ konvergiert:

$$\int_a^b g(x)\, dx < \infty$$

und die eine ***Majorante*** *von f ist:*

$$|f(x,t)| \leqslant g(x) \quad \text{für } (x,t) \in [a,b) \times M.$$

Dann ist für alle $t \in M$ das uneigentliche Integral von f über $[a, b)$ ***absolut*** *und* ***gleichmäßig*** *konvergent. Die durch*

$$\Phi : t \mapsto \int_a^b f(x,t)\, dx$$

definierte Funktion $\Phi : M \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis (Stetigkeit von uneig. Parameterint.).
Nach Lemma 5.3.14 sind f und $|f|$ gleichmäßig uneigentlich integrierbar. Nach Feststellung 5.3.12 ist die durch

$$\Phi : t \mapsto \int_a^b f(x,t)\, dx$$

definierte Funktion $\Phi : M \to \mathbb{R}$ stetig.

Bemerkung (zum Beweis von Satz 5.3.16).
Wir führen den Stetigkeitsbeweis nochmal direkt aus, um den Gebrauch der Majorante zu demonstrieren.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in [a, b)$, so daß $\int_{x_0}^b g(x)\, dx < \varepsilon$.

Nach Satz 5.3.1 ist $M \ni t \mapsto \int_a^{x_0} f(x,t)\, dx$ gleichmäßig stetig. Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für t_1, $t_2 \in M$ mit $d(t_1, t_2) < \delta$ stets

$$\left| \int_a^{x_0} f(x,t_1)\, dx - \int_a^{x_0} f(x,t_2)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x,t_1)\, dx - \int_a^b f(x,t_2)\, dx \right| \\
&\quad \leqslant \left| \int_a^{x_0} f(x,t_1)\, dx - \int_a^{x_0} f(x,t_2)\, dx \right| \\
&\qquad + \left| \int_{x_0}^b f(x,t_1)\, dx - \int_{x_0}^b f(x,t_2)\, dx \right| < \varepsilon + 2 \int_{x_0}^b g(x)\, dx < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Feststellung 5.3.17 (Folgen uneigentlicher Integrale)

Es sei $f_n : [a,b) \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$, eine Folge von Regelfunktionen, die ***gleichmäßig uneigentlich integrierbar*** *über $[a,b)$ sind.*

Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere ***lokal gleichmäßig*** *gegen eine Grenzfunktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$.*

Dann ist f uneigentlich integrierbar über $[a,b)$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweis (Folgen uneigentlicher Integrale).

Da die $(f_n)_n$ gleichmäßig uneigentlich integrierbar sind, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in [a,b)$, so daß

$$\left|\int_x^y f_n(\xi)\,d\xi\right| < \varepsilon \quad \text{für } x,\ y \in [x_0, b).$$

Da die $(f_n)_n$ auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen f konvergieren, gilt

$$\left|\int_x^y f(\xi)\,d\xi\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_x^y f_n(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{für } x,\ y \in [x_0, b).$$

Also ist f uneigentlich integrierbar.

Da die f_n auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergieren, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ gilt:

$$\left|\int_a^{x_0} f(\xi)\,d\xi - \int_a^{x_0} f_n(\xi)\,d\xi\right| < \varepsilon.$$

Insgesamt: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in [a,b)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $x \in [x_0, b)$ und $n \geqslant n_0$ stets

$$\left|\int_x^y f_n(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \varepsilon, \qquad \left|\int_x^y f(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \varepsilon,$$
$$\left|\int_a^{x_0} f(\xi)\,d\xi - \int_a^{x_0} f_n(\xi)\,d\xi\right| < \varepsilon.$$

Wir erhalten nun für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(\xi)\,d\xi - \int_a^b f_n(\xi)\,d\xi\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^{x_0} f(\xi)\,d\xi - \int_a^{x_0} f_n(\xi)\,d\xi\right| + \left|\int_{x_0}^b f(\xi)\,d\xi\right| + \left|\int_{x_0}^b f_n(\xi)\,d\xi\right| \\
&\leqslant 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bemerkung. Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung 3.2.22 gilt auch für uneigentlich integrierbare Funktionen:

Bemerkung 5.3.18 (Hauptsatz d. Int.- Diff.-Rechn.)
Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein $t_0 \in (c.d)$, so daß f uneigentlich integrierbar ist über $(c, t_0]$.
2. f ist uneigentlich integrierbar über $(c, t]$ für $t \in (c, d)$.
3. Es gibt eine stetige Funktion $F : [c, d) \to \mathbb{R}$, die auf dem offenen Intervall (c, d) differenzierbar ist mit Ableitung $F' = f$.

Dann gilt für $t \in [c, d)$

$$F(t) = F(c) + \int_{\downarrow c}^t f(\tau)\,d\tau.$$

Beweis. Offensichtlich ist $\boxed{1 \Leftrightarrow 2.}$

$\boxed{3 \Rightarrow 2:}$ Nach dem Hauptsatz 3.2.22 gilt für $s,\, t \in (c, d)$ mit $s < t$:

$$F(t) = F(s) + \int_s^t f(\tau)\,d\tau.$$

Da F im Anfangspunkt c stetig ist, existiert das uneigentliche Integral

$$\lim_{s\downarrow c} \int_s^t f(\tau)\,d\tau = F(t) - F(c).$$

$\boxed{2 \Rightarrow 3:}$ Es sei $s,\, t \in (c, d)$ mit $s < t$. Die Funktion

$$\Phi : [c, d) \ni t \mapsto \int_c^t f(\tau)\,d\tau = \int_c^s f(\tau)\,d\tau + \int_s^t f(\tau)\,d\tau$$

ist stetig auf $[c, d)$. Nach dem Hauptsatz 3.2.22 gilt $\Phi'(t) = f(t)$.

Bemerkung (Folgen differenzierbarer Fnktn.)

In dem Grenzwertsatz 3.2.24 für Folgen $(f_n)_n$ differenzierbarer Funktionen wird vorausgesetzt, daß die Ableitungen f_n' auf einem offenen Interfall lokal gleichmäßig konvergieren, und daß die Funktionswerte $f_n(t_0)$ in einem **inneren** Punkt t_0 des Intervalls konvergieren.

Der Beweis ergibt sich aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung 3.2.22 und dem Grenzwertsatz 3.1.17 (2.) für eigentliche Integrale

Betrachten wir stattdessen die Werte $f_n(c)$ in einem Endpunkt c des Intervalls, so wird die Stammfunktion durch ein uneigentliche Integrale ausgedrückt.

Kombinieren wir in gleicher Weise die Bemerkung 5.3.18) zum Hauptsatz der Integral- und Differentialrechung mit dem Grenzwertsatz 5.3.17, so erhalten wir das folgende Resultat:

Feststellung 5.3.19 (Folgen differenzierbarer Fnktn.)

Es seien $[c,d) \subset \mathbb{R}$ *und* $t_0 \in (c,d)$

Es sei $f_n : [c,d) \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ *eine Folge stetiger Funktionen mit stetigen Ableitungen* $f_n' : (c,d) \to \mathbb{R}$.

(i) Die Familie $(f_n')_n$ *sei gleichmäßig uneigentlich integrierbar über* (c, t_0).

(ii) Die Folge $(f_n')_n$ *konvergiert lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion* $g : (c,d) \to \mathbb{R}$.

(iii) Die Zahlenfolge $(f_n(c))_n$ *konvergiert gegen ein* $y_0 \in \mathbb{R}$.

Dann konvergiert die Folge $(f_n)_n$ *lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion* $f : [c,d) \to \mathbb{R}$. *Diese ist stetig auf* $[c,d)$ *und differenzierbar auf* (c,d) *mit Ableitung* $f' = g$. *Es gilt*

$$f(t) = y_0 + \int_c^t g(x,\tau)\, d\tau.$$

Beweis (Folgen differenzierbarer Fnktn.).

Da f auf $[c,d)$ stetig und auf (c,d) stetig differenzierbar ist, folgt aus dem der Bemerkung 5.3.18

$$f_n(t) = f_n(c) + \int_c^t f_n'(\tau)\, d\tau.$$

Da die Familie $(f_n')_n$ nach Voraussetzung gleichmäßig uneigentlich integrierbar ist, existiert nach Feststellung 5.3.17 für $t \in [c,d)$ der Grenzwert

$$\begin{aligned} f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) &= \lim_{n\to\infty}(c) + \lim_{n\to\infty} \int_c^t f_n(\tau)\, d\tau \\ &= y_0 + \int_c^t g(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist offensichtlich lokal gleichmäßig auf $[c,d)$.

Da g stetig und uneigentlich integrierbar ist, ist die Grenzfunktion f stetig auf $[c,d)$ und hat auf (c,d) die Ableitung $f' = g$.

Bemerkung. Aus dem Majorantenkriterium 5.2.7 folgt sofoert das Majoratenkriterium für uneigentliche Parameter-Integrale:

Bemerkung 5.3.20 (Majorantenkrit. Param.-Int.)

Es seien $I = [a, b)$ ein Intervall , M eine Menge und $f,\, g : I \times M \to \mathbb{R}$ für jedes feste $t \in M$ Regelfunktionen.

Wenn g eine **Majorante** von f ist:

$$|f(x,t)| \leqslant g(x) \quad \text{für } (x,t) \in [a,b) \times M.$$

und wenn das uneigentliche Integral

$$\int_a^b g(x,t)\,dx < \infty$$

gleichmäßig konvergiert, dann ist das uneigentliche Integral von f über $[a, b)$ **absolut** und **gleichmäßig** konvergent.

Feststellung 5.3.21 (Ableitung uneig. Parameterint.)

Die Funktion $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ sei stetig und auf $[a,b) \times (c,d)$ nach t partiell differenzierbar.

*Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t} : [a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ sei **stetig**. Das uneigentliche Integral*

$$\Psi : (c,d) \ni t \mapsto \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

sei gleichmäßig konvergent. Wenn die uneigentlichne Integrale

$$\int_a^b f(x,c)\,dx \quad \textit{und} \quad \int_c^{t_0} \Psi(\tau)\,d\tau$$

für ein $t_0 \in (c,d)$ konvergieren, dann ist f über $[a,b)$ lokal gleichmäßig uneigentlich integrierbar. Das uneigentliche Integral ist differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx.$$

Beweis (Ableitung uneig. Parameterint.).

Für eine monoton wachsende Folge $(b_n)_n$ in $[a,b)$ mit $b_n \to b$ bilde man die stetig differenzierbaren Funktionen (vgl. Satz 5.3.5):

$$\Phi_n(t) := \int_a^{b_n} f(x,t)\,dx, \quad \Phi_n'(t) = \int_a^{b_n} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

für $t \in (c,d)$. Nach Voraussetzung konvergieren die Φ_n' gleichmäßig gegen die stetige Funktion $\Psi(t) := \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$.

Ψ ist nach Vor. uneigentlich integrierbar über Intervall $(c, t_0]$.

Da die Φ'_n gleichmäßig gegen Ψ konvergieren, ist die Familie $(\Phi'_n)_n$ über das beschränkte Intervall $(c, t_0]$ gleichmäßig uneigentlich integrierbar .

Nach Vorausetzung konvergiert die Folge $(\Phi_n(c))_n$.

Nach Feststellung 5.3.19 konvergieren die Φ_n auf $[c, d)$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion Φ und es gilt $\Phi' = \Psi$.

Dies gilt für jede monotone Folge $(b_n)_n$ mit $b_n \to b$.

Satz 5.3.22 (Ableitung uneig. Parameterint.)

Die Funktion $f : [a, b) \times J \to \mathbb{R}$, $\quad f : (x, t) \mapsto f(x, t)$, sei stetig und nach der zweiten Variablen t partiell differenzierbar. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$: $[a, b] \times (c, d) \to \mathbb{R}$ sei ***stetig****.*

Es gebe eine nichtnegative Regelfunktion $g : [a, b) \to \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral über $[a, b)$ konvergiert:

$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty$$

und die eine ***Majorante*** *von $\frac{\partial f}{\partial t}$ ist:*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leqslant g(x) \quad \text{für } (x, t) \in [a, b) \times (c, d).$$

Wenn für ein $t_0 \in [c, d]$ das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x, t_0)\,dx$ konvergiert, dann ist f lokal gleichmäßig integrierbar und differenzierbar. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x, t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx.$$

Beweis (Ableitung uneig. Parameterint.).

Es sei $(b_n)_n$ eine beliebige monoton wachsende Folge in $[a, b)$, die gegen b konvergiert. Man bilde die Funktionen

$$\Phi_n(t) := \int_a^{b_n} f(x, t)\,dx.$$

Nach Nach Satz 5.3.5 sind die Ableitungen

$$\Phi'_n(t) = \int_a^{b_n} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx \quad \text{für } t \in (c, d)$$

stetig, gleichmäßig beschränkt und konvergieren nach Voraussetzung gleichmäßig gegen

$$\Psi(t) := \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx.$$

Für ein $t_0 \in [c, d)$ existiert $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t_0)$. Nach Satz 3.2.24 bzw. Feststellung 5.3.19 konvergieren die Stammfunktionen Φ_n lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion Φ und es gilt $\Phi' = \Psi$.

Beispiele 5.3.23 ($\int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$)
Es seien (vgl. Beispiel 5.3.13):

$$f(x,t) := e^{-xt} \frac{\sin x}{x}, \quad \Phi(t) := \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ für } t \in [0,\infty).$$

Die Partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -e^{-xt} \sin x$ ist nach Beispiel 5.3.15 lokal gleichmäßig uneigentlich integrierbar.

Nach Satz 5.3.22 existiert die Ableitung (vgl. Beispiel 5.1.8):

$$\Phi'(t) = -\int_0^\infty e^{-xt} \sin x\, dx = -\frac{1}{1+t^2} \quad \text{für } t \in (0,\infty)\ .$$

Nach Beispiel 5.3.13 ist Φ stetig auf $[0,\infty$ und folglich gilt:

$$\Phi(t) = \Phi(0) - \int_0^t \frac{dt}{1+t^2} = \Phi(0) - \arctan t \quad \text{für } t \in [0,\infty).$$

Aus $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$ folgt $\Phi(0) = \lim\limits_{t\to\infty} \arctan t = \pi/2$.

Bezeichnung 5.3.24 (Gamma-Funktion)
Man definiert die Gamma-Funktionauf der rechten Halbebene $\{z \mid z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$ durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad \text{für } x := \operatorname{Re} z > 0.$$

Bemerkung: Das Integral ist lokal gleichmäßig konvergent: (beachte: $|t^{z-1}| = t^{x-1}|$):

$$\int_0^1 e^{-t} \left|t^{z-1}\right| dt \leqslant \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \left.\frac{t^x}{x}\right|_0^1 = \frac{1}{x} < \infty \quad \text{für } \operatorname{Re} z > 0.$$

Aus $t^{-n} e^t = t^{-n} \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \geqslant \frac{t^2}{(n+2)!}$ folgt für $0 < \operatorname{Re} z \leqslant n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^\infty e^{-t} \left|t^{z-1}\right| dt \leqslant (n+1)! \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = (n+1)! < \infty.$$

Satz 5.3.25 (Funktionalgleichung der Gamma-Fnkt.)
1. *Die Gamma-Funktion* $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ *ist stetig und unendlich oft differenzierbar. Es gilt*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^k e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \textit{für } x \in (0,\infty).$$

2. *Die Gammafunktion erfüllt sie Funktionalgleichung*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \textit{für } \operatorname{Re} z > 0.$$

3. *Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Beweis (Funktionalgleichung der Gamma-Funktion).

1. Da die uneigentlichen Integrale

$$0 \leqslant \int_0^1 |\underbrace{\log t}_{=-y}|^n \underbrace{e^{-t}}_{\leqslant e} t^{x-1}\,dt \leqslant \int_0^\infty y^n e e^{-y(x-1)} e^{-y}\,dy < \infty,$$
$$\int_1^\infty (\underbrace{\log t}_{\leqslant t-1})^n e^{-t} t^{x-1}\,dt \leqslant \int_1^\infty t^n e^{-t} t^{x-1}\,dt < \infty$$

absolut und lokal gleichmäßig konvergieren, folgt die Behauptung über die Ableitungen aus Satz 5.3.21.

2. Man integriere partiell. Für $t \in (0,\infty)$ erhält man (vgl. 5.1.7):

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x = \underbrace{-e^{-t} t^x \Big|_{t=0}^{\infty}}_{=0} + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt = x\Gamma(x).$$

3. Es ist $\Gamma(1) = 1$. Induktiv folgt nun aus (2.)

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!\,.$$

Bemerkung. 1. Die Funktionalgleichung $\Gamma(z) = z\Gamma(z-1)$ benutzt man, um die Gamma-Funktion auch für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$ zu erklären.

2. Die Gammafunktion ergänzt die Fakultät zu einer analytischen Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$ (Gauss 1812).

3. Die Gamma-Funktion ist durch die Funktionalgleichung nicht eindeutig bestimmt. Wenn f eine periodische Funktion mit einer Periode 1 ist, so erfüllt das Produkt $f\Gamma$ ebenfalls die Funktionalgleichung.

4. Die Gamma-Funktion hat noch viele weitere Eigenschaften, z.B.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

und (Gauß 1812)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}.$$

Beispiele 5.3.26 ($\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$)

Ein häufig benutzter Zusammenhang ist:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}.$$

Beweis ($\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).

Mit der Substitution $s = y^2$ erhält man

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{-1}{2}}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{-1} 2y\, dy \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Das letztere Integral berechnen wir im folgenden Beispiel 5.3.27

Beispiele 5.3.27 ($\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$)

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$ und die zugehörige Normalverteilung spielen in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle.

Beweis ($\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$).

Man schreibe den Integranden als Stammfunktion der Ableitung nach dem Parameter t und vertausche die Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\, dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \int_0^t e^{-(1+x^2)\tau^2} 2\tau\, d\tau\right) dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^t 2e^{-\tau^2} \int_0^1 e^{-(\tau x)^2} d(\tau x)\, d\tau \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^t 2e^{-\tau^2} \left(\int_0^{\tau} e^{-y^2}\, dy\right) d\tau \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(\int_0^t e^{-\tau^2}\, d\tau\right)^2.\end{aligned}$$

Da die linke Seite für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert, folgt

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Feststellung 5.3.28 (Stammfnkt. uneig. Param.-Int.)

Die Funktion

$$f : [a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}, \quad f : (x, t) \mapsto f(x, t)$$

sei stetig und das uneigentliche Integral

$$\Phi : [c,d] \ni t \mapsto \int_a^{b-} f(x,t)\,dx$$

sei gleichmäßig konvergent. Φ *ist also stetig.*

Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^{b-} \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx$ *und es gilt:*

$$\int_c^d \int_a^{b-} f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^{b-} \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx.$$

Beweis (Stammfnkt. uneig. Param.-Int.).

Es sei $\varepsilon > 0$. Da das uneigentliche Integral $\int_a^{b-} f(\xi,t)\,d\xi$ gleichmäßig konvergiert, gibt es ein $x_0 \in [a,b)$ (vgl. 5.3.10), so daß

$$\left|\int_a^{b-} f(\xi,t)\,d\xi - \int_a^{x} f(\xi,t)\,d\xi\right| < \varepsilon \quad \text{für } x \in [x_0,b).$$

Die Doppelintegrale: $\int_c^d \int_a^x f(\xi,t)\,d\xi = \int_a^x \int_c^d f(\xi,t)\,d\xi$ vertauschen (vgl. Satz 5.3.8).

Für $x \in [x_0,b)$ folgt nun die Abschätzung:

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^{x} \int_c^{d} f(\xi,t)\,d\xi - \int_c^{d} \int_a^{b-} f(\xi,t)\,d\xi\right|\\ &\qquad = \left|\int_c^{d} \int_a^{x} f(\xi,t)\,d\xi - \int_c^{d} \int_a^{b-} f(\xi,t)\,d\xi\right| < \varepsilon|d-c|.\end{aligned}$$

Also existiert: $\displaystyle\int_a^{b-} \int_c^{d} f(\xi,t)\,dt\,d\xi = \int_c^{d} \int_a^{b-} f(\xi,t)\,d\xi\,dt.$

Feststellung 5.3.29 (nichtnegative uneig. Doppelint.)

*Die **nicht negative** Funktion*

$$f : [a,b) \times [c,d) \to \mathbb{R}^+, \quad f : (x,t) \to f(x,t)$$

sei stetig. Die beiden uneigentlichen Integrale

$$\begin{aligned}\Phi : [c,d) \ni t &\mapsto \int_a^{b-} f(x,t)\,dx,\\ \Psi : [a,b) \ni x &\mapsto \int_c^{d-} f(x,t)\,dt\end{aligned}$$

seien lokal gleichmäßig konvergent. Φ *und* Ψ *sind also stetig.*

Wenn eines der beiden untenstehenden uneigentlichen Doppelintegrale konvergiert, dann konvergiert auch das andere und si sind gleich. In $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *gilt also immer (vgl Bez. 5.2.5):*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx.$$

Beweis (nichtnegative uneig. Doppelint.).

Es sei zunächst $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx < \infty$. Nach Feststellung 5.3.28 folgt dann für alle $t \in [c,d)$

$$\begin{aligned}\int_c^t \int_a^b f(x,\tau)\,dx\,d\tau &= \int_a^b \int_c^t f(x,\tau)\,d\tau\,dx \\ &\leqslant \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx < \infty.\end{aligned}$$

Also konvergiert das uneigentliche Integral und es gilt:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,\tau)\,dx\,d\tau \leqslant \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx < \infty.$$

Analog folgt nun

$$\int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx \leqslant \int_c^d \int_a^b f(x,\tau)\,dx\,d\tau.$$

Also sind die beiden uneigentliche Doppelintegrale gleich.

Satz 5.3.30 (absolut konvergente uneig. Doppelint.)
Die Funktion $f : [a,b) \times [c,d) \to \mathbb{C}$, $f : (x,t) \to f(x,t)$ *sei stetig und die beiden uneigentlichen Integrale*

$$t \mapsto \int_a^b |f(x,t)|\,dx < \infty, \quad x \mapsto \int_c^d |f(x,t)|\,dt < \infty$$

seien lokal gleichmäßig konvergent. Dann sind auch die Integrale $t \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dx$ *und* $x \mapsto \int_c^d f(x,t)\,dt$ *loklal gleichmäßig konvergent und stetig.*
Wenn das Doppelintegral konvergiert:

$$\int_c^d \int_a^b |f(x,t)|\,dx\,dt < \infty$$

dann konvergieren die folgenden Doppelintegrale und es gilt:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx.$$

Bemerkung (zum Beweis des Satzes 5.3.30).

Wenn f reellwertig ist, zeige man: Die uneigentlichen Doppelintegrale der beiden nichtnegativen, stetigen Funktionen

$$f^{\pm} : (x,t) \mapsto \max\{\pm f(x,t), 0\},$$

existieren und vertauschen:

$$\int_c^d \int_a^b f^\pm(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_c^d f^\pm(x,t)\,dt\,dx < \infty.$$

Aus $f = f^+ - f^-$ folgt dann die Behauptung des Satzes:

$$\begin{aligned}
&\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt \\
&\qquad = \int_c^d \int_a^b f^+(x,t)\,dx\,dt - \int_c^d \int_a^b f^-(x,t)\,dx\,dt \\
&\qquad = \int_a^b \int_c^d f^+(x,t)\,dt\,dx - \int_a^b \int_c^d f^-(x,t)\,dt\,dx \\
&\qquad = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx
\end{aligned}$$

Wenn f komplexwertig ist, betrachte man $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$.

Beweis (absolut konvergente uneig. Doppelint.).

Es reicht, die Doppelintegrale für $f^\pm$ zu untersuchen.

Da $0 \leqslant f^\pm \leqslant |f|$ ist, folgt aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Integrale (vgl. Bemerkung 5.3.20 und Festst. 5.3.12):

$$t \mapsto \int_a^b |f(x,t)|\,dx < \infty, \quad x \mapsto \int_c^d |f(x,t)|\,dt < \infty,$$

daß die entsprechenden Integrale für $f^\pm$ lokal gleichmäßig konvergieren und stetig sind. Aus

$$t \mapsto \int_a^b f^\pm(x,t)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x,t)|\,dx < \infty,$$

folgt nun

$$\int_c^d \int_a^b f^\pm(x,t)\,dx\,dt \leqslant \int_c^d \int_a^b |f(x,t)|\,dx\,dt < \infty.$$

Nach Feststellung 5.3.29 vertauschen die Dopplelintegrale von $f^\pm$ und folglich auch die Doppelintegrale von $f = f^+ - f^-$.

Beispiele 5.3.31 (nochmal: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \pi/2$)

Es sei $0 < r < R < \infty$. Für $t \in [r, R]$ ist das uneigentliche Integral (vgl. Beispiel 5.3.15 und Beispiel 5.1.8))

$$x \mapsto \int_0^\infty e^{-xt} \sin x\,dx = \frac{1}{1+t^2}$$

gleichmäßig konvergent und stetig. Nach Feststellung 5.3.28 kann man das folgende Doppelintegral vertauschen und erhält:

$$\begin{aligned}
\arctan t\Big|_r^R &= \int_r^R \int_0^\infty e^{-xt} \sin x\,dx\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_r^R e^{-xt} \sin x\,dt\,dx = \int_0^\infty (e^{-rx} - e^{-Rx}) \frac{\sin x}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-xt} \sin x/x \, dx$ ist nach Beispiel 5.3.13 gleichmäßig konvergent für $t \in [0,\infty)$. Man bilde nun die Grenzwerte $r \to 0$ und $R \to \infty$. (vgl. auch 5.3.23).

Beispiele 5.3.32 (nochmal: $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$)

Wir verwenden eine ähnliche Idee wie in Beispiel 5.3.27.

Die uneigentlichen Integrale

$$t \mapsto \int_0^\infty xe^{-(1+t^2)x^2} \, dx, \quad x \mapsto \int_0^\infty xe^{-(1+t^2)x^2} \, dt$$

sind lokal gleichmäßig konvergent und folglich stetig. Nach Feststellung 5.3.29 kann man in dem uneigentlichen Doppelintegral $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(1+t^2)x^2} \, dx \, dt$ die Reihenfolge der Integration vertauschen. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} &= \int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(1+t^2)x^2} \, dx \, dt \\ \overset{!}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(1+t^2)x^2} \, dt \, dx &= \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-(xt)^2} \underbrace{x \, dt}_{=dy} \Big) e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \Big) e^{-x^2} dx = \Big(\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \Big)^2 . \end{aligned}$$

Bemerkung.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei **nicht absolutkonvergenten** uneigentlichen Doppel-Integralen i. a. zu unterschiedlichen Ergebnissen führt:

Beispiele 5.3.33 (Vertausch. von uneig. Doppel-Int.)

Man bilde die zweite partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \arctan \frac{x}{y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{für } x,\, y \in (0,\infty).$$

$$\begin{aligned} \int_{0+}^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy \Big) \, dx &= \int_{0+}^1 \Big[\frac{y}{x^2+y^2} \Big|_{y=0}^1 \, dx = \frac{\pi}{4}, \\ \int_{0+}^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \Big) \, dy &= \int_{0+}^1 \Big[\frac{-x}{x^2+y^2} \Big|_{x=0}^1 \, dy = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Beispiele 5.3.34 (Vertausch. von uneig. Doppel-Int.)

$$\int_1^\infty \int_0^1 (e^{-xt} - 2e^{-2xt}) dt\, dx = \int_1^\infty \frac{1-e^x}{x} e^{-2x} dx$$
$$\leqslant - \int_1^\infty e^{-2x} dx < 0.$$

Die andere Integrationsreihenfolge ergibt:

$$\int_0^1 \int_1^\infty (e^{-xt} - 2e^{-2xt}) dx\, dt = \int_0^1 \frac{e^y - 1}{y} e^{-2y} dy$$
$$\geqslant \int_0^1 e^{-2y} dy > 0.$$

Beachte: nach dem Mittelwertsatz ist für $x > 0$:

$$0 < \frac{e^x - e^0}{x} = e^\xi \geqslant 1 \quad \text{für ein } \xi \in (0, x).$$

5.3.1 Approximationssatz von Weierstraß

Ziel. Der Approximationssatz von Weierstraß besagt, daß man eine stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall **gleichmäßig durch Polynome approximieren** kann.

Für den Beweis wählen wir eine Methode, die sich auf viele andere Approximationsprobleme übertragen läßt.

Die Grundidee ist, in jedem Punkt x ein **Mittelwert** der Funktionswerte zu bilden, wobei jedoch die Werte in einer kleinen Umgebung U von x viel stärker gewichtet werden.

Wir richten es so ein, daß die gemittelten Funktionen Polynome sind.

Läßt man diese Umgebung U schrumpfen, so wirken sich bei der Mittelung nur noch die Punkte *ganz in der Nähe* von x aus. Da die ursprünglichen Funktion f stetig ist, konvergieren die Mittelwerte gegen $f(x)$. Die Konvergenz ist gleichmäßig.

Bemerkung. Die obige *Mittelung* der Funktionswerte realisieren wir durch die **Faltung** mit einer **Dirac-Folge**.

Die Faltung von Funktionen tritt an vielen Stellen in der Mathematik auf. Diese Bildung findet man, wenn der Definitionsbereich eine abelsche Halbgruppe oder Gruppe ist.

Bsp. (Faltung auf den Halbgruppen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{R}^+$)

Cauchy-Produkt zweier Potenzreihen $\sum_n a_n z^n$, $\sum_m b_m z^m$. Die Koeffizienten c_k der Produktreihe sind (vgl. 4.4.28)

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

Die Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten haben die Form (vgl. 3.4.60)

$$f(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)\gamma(\tau)\,d\tau$$

Bezeichnung 5.3.35 (Faltung von Funktionen auf $\mathbb{R}$)

Es seien $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen.

Wenn das uneigentliche Integral für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, definiert man die Faltung $f \star g$ durch

$$f \star g : \mathbb{R} \ni t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\,dx$$

Bemerkung. Die Faltung wird später mit dem Lebesgue-Integral untersucht.

Bemerkung 5.3.36 (Faltung kommutativ)

Es seien $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen.

Wenn das Faltungsintegral konvergiert, dann gilt

$$f \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx = g \star f(t).$$

Bemerkung 5.3.37 (integrierbar $\star$ beschränkt)

Es seien $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen.

1. Wenn f absolut integrierbar und g beschränkt ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dy < \infty. \quad \|g\|_{\mathrm{sup}} := \sup_{x\in\mathbb{R}}\{|g(x)| < \infty,$$

dann ist die Faltung $t \mapsto f\star g(t)$ gleichmäßig absolut konvergent und beschränkt:

$$|f \star g(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dy \cdot \|g\|_{\mathrm{sup}}.$$

2. Wenn f oder g stetig ist, dann ist $f \star g$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$:

Bezeichnung 5.3.38 (Dirac-Folge)

Eine Folge $(K_n)_n$ von Funktionen auf $\mathbb{R}$ heißt eine **Dirac-Folge**, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. Die $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig, absolut uneigentlich integrierbar über $(-\infty, \infty)$ und
$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\,dx = 1.$$

2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\delta > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ stets gilt:
$$K_n(x) \geqslant 0 \quad \text{für } x \in [-\delta, \delta],$$
$$\int_{-\infty}^{-\delta} |K_n(x)|\,dx + \int_{\delta}^{\infty} |K_n(x)|\,dx < \varepsilon.$$
Dann ist $1 - \varepsilon < \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} K_n(x)\,dx < 1 + \varepsilon.$

Bemerkung. Manchmal fordert man statt 5.3.38(1.) nur
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\,dx = 1.$$
Mann kann die Folge dann normieren.

Satz 5.3.39 (Dirac-Approximation)

Es sei $(K_n)_n$ eine Dirac-Folge auf $\mathbb{R}$ (vgl. Bezeichnung 5.3.38).

Für eine stetige, beschränkte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(K_n \star g)_n$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen g:
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x) g(t-x)\,dx = g(t)$$

Bemerkung zum Beweis:

Da $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\,dx = 1$ ist, kann man die Differenz $K_n \star g - g$ folgendermaßen schreiben:
$$K_n \star g(t) - g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\big(g(t-x) - g(t)\big)\,dx.$$
Nun wird die rechte Seite abgeschätzt.

Beweis (Dirac-Approximation).

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ kompakt. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$|g(\tau) - g(t)| < \varepsilon \quad \text{für } \tau \in \mathbb{R},\ t \in I \text{ mit } |\tau - t| \leqslant \delta.$$

Zu ε und δ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geqslant n_0$ gilt:

$$K_n(x) \geqslant 0 \quad \text{für } x \in [-\delta, \delta],$$
$$\int_{-\infty}^{-\delta} |K_n(x)|\, dx + \int_{\delta}^{\infty} |K_n(x)|\, dx < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |K_n \star g(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)(g(t-x) - g(t))\, dx \right| \\
&\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x)|g(t-x) - g(t)|\, dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} |K_n(x)||g(t-x) - g(t)|\, dx \\
&< (1+\varepsilon)\varepsilon + \varepsilon \|g\|_{\sup}.
\end{aligned}$$

Satz 5.3.40 (Aproximationssatz von Weierstraß)

Es sei I ein komapaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann gibt es eine Folge $(P_n)_n$ von Polynomen, die gleicmäßig auf I gegen f konvergiert.

$$\lim_{n \to \infty} \|f - P_n\|_{\sup}.$$

Bemerkung zum Beweis Zur Vereinfachung des Beweises kann man o. E. annehmen, daß $I = [0, 1]$ und $f(0) = f(1) = 0$ sind.

Sonst bilde man für $t \in [0, 1]$ die Hilfsfunktion

$$\tilde{f} : (t) \mapsto f(a + t(b-a)) - \big(f(a) + t(f(b) - f(a))\big)$$

und approximiere $\tilde{f}$ durch Polynome.

Wenn man $\tilde{f}$ durch 0 fortsetzt, erhält man eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}$.

Beweis (Aproximationssatz von Weierstraß).

Man bilde die Dirac-Folge $(K_n)_n$ mit

$$k_n(x) := \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{c_n} & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

wobei $c_n := \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx$ ist.

Die Folge $P_n := K_n \star \tilde{f}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen $\tilde{f}|I = f$. Die P_n sind Polynome.