Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. G. Wittstock

Klausur Analysis II
Sommersemester 2001

Für jede der folgenden 7 Aufgaben gibt es 10 Punkte; mit 27 Punkten haben Sie bestanden.
Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen, für die gilt:

$$\bar{z}^2 - 2z - \bar{z} = 0.$$

Wie viele Lösungen gibt es?

b) Seien a, $b \in \mathbb{C}$ und $|a| > |b|$. Für welche komplexen Zahlen z gilt

$$|az - b| \leqslant |\bar{b}z - \bar{a}|?$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{e}^x \cosh(x)}{\mathrm{e}^x + 1}\, dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{e}^x \sinh(x)}{\mathrm{e}^x + 1}\, dx.$

Aufgabe 3:

a) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) + f(x) = \sin(x)$$

mit $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$2f''(x) - f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung kann man durch genaues Hinsehen raten.

Aufgabe 4:

a) Sei $X =]0, \infty[$, $d(x,y) = |x-y|$ die übliche Metrik auf X und

$$d_1 : X \times X \to \mathbb{R};\ (x,y) \mapsto \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Zeigen Sie: d_1 ist eine Metrik, und die Abbildung

$$f : (X, d) \to (X, d_1);\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist gleichmäßig stetig.

b) Geben Sie je ein Beispiel einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Metrik), die

I) abgeschlossen ist und leeres Inneres hat,

II) gleich dem Inneren ihres Abschlusses ist,

III) abgeschlossen ist, und für die $A \setminus \{x\}$ offen ist für alle $x \in A$.

Aufgabe 5:

a) Berechnen Sie:

I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$, II) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log(1 - \frac{1}{n^2})$.

b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

I) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n)} \right)^p$ für $p \in \mathbb{N}$,

II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$,

III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$.

Aufgabe 6:

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n}\log(n)} x^n$, II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} (n^3 - 3n^2) x^n$.

b) Bestimmen Sie die Summenfunktion der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$$

im Inneren ihres Konvergenzbereiches.

Aufgabe 7: Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ monoton fallend, und sei $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos(x)\, dx$$

konvergiert.