

Lösungshinweise zur Klausur

Aufgabe 1: a) Ansatz: $z = x + iy$. In die Gleichung einsetzen, damit ergibt sich:

Realteil der Gleichung: $x^2 - y^2 - 3x = 0$,

Imaginärteil der Gleichung: $2xy + y = 0 \iff y = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$.

Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich im Fall $y = 0$: $x = 0 \vee x = 3$,

im Fall $x = -\frac{1}{2}$: $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Also gibt es die vier Lösungen $0, 3, -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{7}, -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{7}$.

b) Übungsaufgabe 2.3 beinhaltet den Spezialfall $a = 1$. Die Rechnung geht genauso und führt auf $z\bar{z} \leq 1$. Die Ungleichung gilt also genau für die $z \in \bar{\mathbb{D}}$.

Aufgabe 2: a) $\int \frac{2e^x \cosh(x)}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x(e^x + e^{-x})}{e^x + 1} dx$

$= \int \frac{t^2 + 1}{t(t+1)} dt \quad (x = \log(t))$

$= \int (1 + \frac{1}{t} - \frac{2}{t+1}) dt \quad (\text{Polynomdivision, Partialbruchzerlegung})$

$= t + \log(t) - 2\log(t+1) + C = e^x + x - 2\log(e^x + 1) + C.$

b) $\int \frac{2e^x \sinh(x)}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx = \int (e^x - 1) dx = e^x - x + C.$

Aufgabe 3: a) Lösung der homogenen Gleichung: $f(x) = ce^{-x}$.

Variation der Konstanten: Ansatz: $f(x) = c(x)e^{-x}$.

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung führt auf $c'(x) = e^x \sin(x)$.

$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$ (zweimal partielle Integration). Also: $\int e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)) + C$,

und $f(x) = (\frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)) + C)e^x$.

$f(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow C = 0$. Also lautet die Lösung: $f(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$.

b) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $f(x) = Ae^{\frac{1}{\sqrt{2}}x} + Be^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$.

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: $f(x) = e^x$.

Damit lösen genau die Funktionen der Form

$$f(x) = e^x + Ae^{\frac{1}{\sqrt{2}}x} + Be^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$, falls man komplexwertige Lösungen sucht,) die inhomogene Gleichung.

Aufgabe 4: a) $d_1(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = 0 \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \iff x = y$,

$d_1(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = d_1(y, x)$,

$d_1(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leq |\frac{1}{x} - \frac{1}{z}| + |\frac{1}{z} - \frac{1}{y}| = d_1(x, z) + d_1(z, y)$.

Also ist d_1 eine Metrik.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Sei $d(x, y) < \delta$. Dann ist $d_1(f(x), f(y)) = d(x, y) < \delta = \varepsilon$.

Also ist f gleichmäßig stetig.

b) Z. B. **I)** $\{0\}$, $\mathbb{N}$ oder $\emptyset$, **II)** $]0, 1[$, $\mathbb{R}$ oder $\emptyset$, **III)** $\{0\}$, $\mathbb{R}$ oder $\emptyset$.

Aufgabe 5: a) **I)** $\sum_{n=1}^N \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{N+\frac{1}{2}} \rightarrow 2.$

$$\begin{aligned}
\text{II)} \quad \sum_{n=2}^N \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^N \log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^N (\log(n+1) + \log(n-1) - 2\log(n)) \\
&= \sum_{n=3}^{N+1} \log(n) + \sum_{n=2}^{N-1} \log(n) - 2 \sum_{n=2}^N \log(n) = \log(N+1) - \log(2) + \log(1) - \log(N) \\
&= -\log(2) + \log\left(\frac{N+1}{N}\right) \rightarrow -\log(2).
\end{aligned}$$

b) I) Verdichtungskriterium. Die Summanden der verdichteten Reihe bilden keine Nullfolge $\Rightarrow$ Divergenz.

II) Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Konvergenz. (Quotientenkriterium ist auch anwendbar.)

III) Leibniz: $\frac{\log(n)}{n}$ ist monoton fallend ab $n = 3$ und konvergiert gegen 0 $\Rightarrow$ Konvergenz.

Aufgabe 6: a) I) $\sqrt[n]{n^{\frac{1}{n} \log(n)}} = e^{(\frac{\log(n)}{n})^2} \rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$

$$\text{II)} \quad \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} (n^3 - 3n^2) \rightarrow \frac{1}{e}.$$

Beachte dabei: Für $n \geq 6$ ist $\frac{1}{2}n^3 \leq n^3 - 3n^2 \leq n^3$. Also: $R = e$.

b) Setze $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$. Dann ist $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x)$.

Also ist $f(x) = -\int \log(1-x) dx = -x \log(1-x) + x + \log(1-x) + C$.

$f(0) = 0$ liefert $C = 0$.

Alternative: Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{n(n-1)}$ führt die Reihe auch auf die Logarithmusreihe zurück.

$$\text{Aufgabe 7:} \quad \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\infty} f(x) \cos(x) dx = \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) \sin(x) dx,$$

und $g(x) = f\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$ erfüllt die Voraussetzungen aus Übungsaufgabe 11.3 $\Rightarrow$ Konvergenz.

Alternative: Imitiere den Beweis von Übungsaufgabe 11.3:

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi + \frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) \cos(x) dx$ konvergiert nach Leibniz,

$$\text{und es ist} \quad \int_0^{\infty} f(x) \cos(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(x) dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi + \frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) \cos(x) dx.$$