1. Übung Analysis 2 SS 2001

Aufgabe 1: Beweise Lemma 3.4.1: Für x, $y \in \mathbb{R}$ ist genau dann $(\cos x, \sin x) = (\cos y, \sin y)$, wenn $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$. **Hinweis:** Betrachte $\cos(x-y)$.

Aufgabe 2: a) Die Umkehrfunktion der Einschränkung $\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ heißt *Arkussinus* und wird mit arcsin bezeichnet. Die Umkehrfunktion der Einschränkung $\cos|_{[0,\pi]}$ heißt *Arkuskosinus* und wird mit arccos bezeichnet.
Führe die Argumentfunktion $\arg : \mathbb{T} \to]-\pi,\pi]$ einmal auf arcsin und einmal auf arccos zurück. ($\mathbb{T}$ bezeichnet die Torusgruppe.)
b) Seien A, B, $C \in \mathbb{R}$. Bestimme alle Lösungen x der Gleichung

$$A\cos x + B\sin x + C = 0$$

mit Hilfe von arcsin und arccos. Für welche A, B, C ist diese Gleichung lösbar?
Hinweis: Additionstheoreme.

Aufgabe 3: a) Bestimme Real- und Imaginärteil von $\frac{3+i}{(1+2i)^2}$.
b) Die komplexen Zahlen $1 \pm i\sqrt{3}$ sind nach Definition Drehstreckungen $r \cdot D$ mit $r > 0$ und $D \in \mathrm{SO}(2)$. Bestimme jeweils r und D. Welches Element der Torusgruppe entspricht D jeweils unter dem in der Vorlesung angegebenen Isomorphismus? Bestimme sein Argument in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
c) Zeige allgemein: Wird einer komplexen Zahl $z \neq 0$ auf diese Art das Argument $[\varphi]$ zugeordnet, so hat die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ das Argument $[-\varphi]$.

Aufgabe 4: a) Die Hyperbelfunktionen. Wir definieren folgende Funktionen:
Hyperbelkosinus, cosinus hyperbolicus: $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$,
Hyperbelsinus, sinus hyperbolicus: $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$,
Hyperbeltangens, tangens hyperbolicus: $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
Zeige: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} \cosh x - \sinh x$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tanh x$.
Berechne die Ableitungen der drei Funktionen und finde Stammfunktionen.
b) Die Areafunktionen. Die Funktionen $\cosh|_{[0,\infty[}$, $\cosh|_{]-\infty,0]}$, sinh und tanh sind injektiv. Berechne ihre Umkehrfunktionen und deren Ableitungen.
Die Umkehrfunktionen zu $\cosh|_{[0,\infty[}$, sinh, tanh heißen *area cosinus hyperbolici, area sinus hyperbolici, area tangentis hyperbolici* und werden mit arcosh, arsinh, artanh bezeichnet.

Aufgabe 5: Wiederhole den Begriff des Differentials (Kap. 3.2.8ff):
a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $a \in I$ und $h \in \mathbb{R}$. Bei welchem der folgenden Terme handelt es sich um eine lineare Abbildung? Bei welchem um eine reelle Zahl? Und bei dem dritten?

$$df \qquad\qquad df(a) \qquad\qquad df(a)(h)$$

b) Sei $g : J \to I$ ebenfalls stetig differenzierbar und $b \in J$. Zeige:

$$d(f \circ g)(b) = df(g(b)) \circ dg(b).$$

Abgabe: Wegen des Feiertags ist die Abgabe **ausnahmsweise** am Dienstag, den 17. 04. 2001, vormittags von 9.00 bis 11.15 Uhr (allerspätestens bis 13.00 Uhr) bei mir (Zimmer 304). (Regulär wird die Abgabe montags **vor** der Vorlesung sein.)
Mein Name ist Benedikt Betz. Ich betreue dieses Semester die Übungen zur Analysis 2. Ich bin erreichbar in Zimmer 304, Gebäude 27.1, oder per e-mail: benedikt@math.uni-sb.de. Feedback ist erwünscht.