10. Übung Analysis 2 SS 2001

Aufgabe 1: a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver Zahlen. Zeige: Ist $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, so sind die Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Das ist insbesondere der Fall, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert und > 0 ist.

b) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n(n^2+\sqrt{n})}{(n+\sqrt{n})3^n + n^2 2^n}?$$

Hinweis: Man kann zum Beispiel eine geeignete Vergleichsreihe finden.

Aufgabe 2: (Funktionenreihen) In der Literatur findet sich ein „Weierstraßsches Majorantenkriterium“ benannter Satz.

a) Was sagt er aus?

b) Mit welchen zwei Konvergenzbegriffen für Funktionenreihen hat er zu tun?

c) Welcher Satz aus der Vorlesung macht eine ähnliche Aussage?

Das Weierstraßsche Majorantenkriterium ist meist näher an der Praxis, da man keine sup-Normen berechnen, sondern bloß abschätzen muss.

Aufgabe 3: (Potenzreihen) Zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ und

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Aufgabe 4: Bestimme mit Hilfe von Potenzreihen:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log^2(1+x) - \sin^2(x)}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$.

Begründe alle Rechenschritte sorgfältig!

Zusatz: Berechne die Grenzwerte auch mit der Regel von de l'Hospital und vergleiche den Rechenaufwand.

Aufgabe 5: Beweise oder widerlege: Konvergiert $\sum_n a_n$ und ist $(b_n)_n$ eine Nullfolge positiver Zahlen, so konvergiert $\sum_n a_n b_n$.

Abgabe: Montag, 18. 06. 2001, vor der Vorlesung.

Hinweis: Wegen des Feiertags fallen am Donnerstag, den 14. 06. 2001, die Übungen aus. Ersatzweise findet am Freitag um 14 Uhr eine Saalübung im Hörsal III statt.