

11. Übung Analysis 2 SS 2001

Aufgabe 1: (Cauchyprodukt)

- a) Wie lauten die Potenzreihenentwicklungen um den Punkt 0 von $\sinh$ und $\cosh$?
b) Beweise mit Hilfe des Cauchyprodukts der Potenzreihen:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y).$$

Aufgabe 2: (Uneigentliche Integrale) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 x^a e^{-x^b} dx?$$

Aufgabe 3: Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend und sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Zeige, dass

$$\int_0^\infty f(x) \sin(x) dx$$

konvergiert.

Aufgabe 4: (Polynomische Formel) Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$. Zeige folgende Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes:

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^n = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^k \\ |\alpha| = n}} P_\alpha a^\alpha,$$

wobei man für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$ setzt: $|\alpha| = \sum_{i=1}^k \alpha_i$, $a^\alpha = \prod_{i=1}^k a_i^{\alpha_i}$ und $P_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\prod_{i=1}^k \alpha_i!}$.

Aufgabe 5: Sind $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n x^n$ zwei konvergente Potenzreihen, so kann man sie formal ineinander einsetzen und erhält die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n \left(\sum_{k=1}^\infty b_k x^k \right)^n$.

a) Bestimme die ersten drei Koeffizienten dieser Potenzreihe. Wer findet eine allgemeine Formel? (Hinweis: Aufgabe 4)

In [Henri Cartan, *Elementare Theorien der Analytischen Funktionen einer oder mehrerer Komplexen Funktionen*, Satz 5.1] wird die Konvergenz dieser Potenzreihe gegen die Funktion $f \circ g$ bewiesen. Mit welcher Aufgabe aus dem letzten Semester hat das zu tun?

b) Bestimme die ersten drei Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung im Punkt 0 von

$$f(x) = \log \left(\frac{1+x^2}{\sin x + \cos^2 x} \right).$$

Anleitung: Schreibe f als Verknüpfung einfacher Funktionen, deren Potenzreihenentwicklungen bekannt sind, setze die Terme bis zum Grad 2 ineinander ein, ordne nach Potenzen von x und ignoriere alle Terme von höherem Grad als 2. Rechtfertige dieses Vorgehen im Hinblick auf a) und die zitierte Konvergenzaussage.

Abgabe: Montag, 25. 06. 2001, vor der Vorlesung.