2. Übung Analysis 2 SS 2001

Aufgabe 1: Löse in $\mathbb{C}$ folgende Gleichungen:
a) $z^2 = 5 + 12i$, **b)** $z^2 + 2iz + 1 = 0$, **c)** $z^2 + z - \bar{z} = 0$.

Aufgabe 2: Löse in $\mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^3 + z^2 - \frac{35}{3}z + 12 + \frac{1}{27} = 0.$$

Anleitung: Transformiere die Gleichung durch $z = w - \frac{1}{3} \cdot (\text{Koeffizient von } z^2)$ auf die *Normalform*

$$w^3 + pw + q = 0.$$

Aus dieser erhält man durch $w = v - \frac{p}{3v}$ eine quadratische Gleichung in v^3. Löse diese, bestimme v und setze in die Substitutionen ein. (Ergebnis: $-\frac{13}{3}$ und $\frac{5}{3}$ als doppelte Nullstelle.)
Diese Gleichung mit reellen Koeffizienten hat nur reelle Lösungen. Dennoch tauchen in der Rechnung komplexe Zahlen auf! „Dieser überraschende Umstand hat wesentlich zur Einführung komplexer Zahlen im 16. Jahrhundert beigetragen.“ (E. ZEIDLER, Hg.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik,* Leipzig: Teubner 1996, S. 649.)

Aufgabe 3: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ heißt *offene Einheitskreisscheibe,* $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ heißt *abgeschlossene Einheitskreisscheibe.* Sei $c \in \mathbb{C}$. Zeige:
a) Ist $|c| < 1$, so ist $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leqslant |1 - \bar{c}z|\} = \bar{\mathbb{D}}$.
b) Ist $|c| = 1$, so ist $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leqslant |1 - \bar{c}z|\} = \mathbb{C}$.
c) Ist $|c| > 1$, so ist $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leqslant |1 - \bar{c}z|\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.
d) Für $|c| < 1$ ist die Abbildung $\bar{\mathbb{D}} \to \bar{\mathbb{D}}$; $z \mapsto \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$ wohldefiniert und bijektiv, und sie bildet $\mathbb{D}$ bijektiv auf $\mathbb{D}$ und S^1 bijektiv auf S^1 ab.

Aufgabe 4: Benutze die *rationale Parametrisierung des Einheitskreises* wie in der Vorlesung angegeben zur Berechnung folgender Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 1}$,

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ auf $]0,1[$.

Es stehe R für eine rationale Funktion in zwei Variablen. Die rationale Parametrisierung des Einheitskreises führt die Berechnung von Integralen der Form $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ und $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$ auf die Berechnung von Integralen gebrochen rationaler Funktionen zurück. Das ist deshalb interessant, weil es ein algorithmisches Verfahren zur Berechnung von Stammfunktionen von gebrochen rationalen Funktionen gibt, sofern nur die Faktorisierung des Nennerpolynoms bekannt ist! Dieses Verfahren werden wir in Kürze kennen lernen.

Abgabe: Montag, 23. 04. 2001, vor der Vorlesung.