3. Übung Analysis 2 SS 2001

Aufgabe 1: a) Leite mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion die Additionstheoreme für $\cos(x \pm y)$ und $\sin(x \pm y)$ her.
b) Berechne $i^i := e^{i \log i}$. Bestimme Real- und Imaginärteil von $\log(3 - 4i)$.

Aufgabe 2: a) Wo steckt der Fehler? (Für $x \in \mathbb{R}_-$ sei $\sqrt{x}$ definiert als $i\sqrt{|x|}$.)

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

b) Für welche Paare von komplexen Zahlen z, $w \in \mathbb{C}$ gilt $\sqrt{z \cdot w} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$? Wie lautet die Rechenregel für alle anderen z, w?

Aufgabe 3: Finde die Lösung der Differentialgleichung

$$f''(x) + 2af'(x) + bf(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

mit a, $b \in \mathbb{R}$ in den Fällen $a^2 - b < 0$, $a^2 - b = 0$ und $a^2 - b > 0$.

Aufgabe 4: Integrale rationaler Funktionen, Teil 1. Es seien p und $q \neq 0$ Polynome und der höchste Koeffizient von q auf 1 normiert. Falls die Faktorisierung von q in irreduzible Faktoren bekannt ist, kann man eine Stammfunktion von $\frac{p}{q}$ finden. Man geht dazu auf folgende Weise vor:

1. Schritt: Polynomdivision: $\frac{p}{q} = r + \frac{s}{q}$ mit Polynomen r und s, wobei $\operatorname{grad} s < \operatorname{grad} q$ ist. $\int r$ kann man direkt angeben, es bleibt $\int \frac{s}{q}$ zu bestimmen.
   Beispiel: Berechne $\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}\, dx$.

2. Schritt: Partialbruchzerlegung. Sei

   $$q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{\nu_i} \prod_{j=1}^{m} (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{\mu_j}$$

   die Zerlegung von q in irreduzible Faktoren mit Vielfachheiten ν_i und μ_j. Das heißt, die Faktoren $x^2 + \beta_j x + \gamma_j$ haben keine reelle Nullstelle. Dann gibt es (eindeutig bestimmte) Zahlen a_{ik}, b_{jl}, c_{jl}, so dass

   $$(*) \quad \frac{s(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\nu_i} \frac{a_{ik}}{(x - \alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{b_{jl}x + c_{jl}}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^l}.$$

   Diese bestimmt man auf folgende Art:

   (a) $(*)$ mit q multiplizieren und kürzen.
   (b) Ausmultiplizieren, Ordnen nach Potenzen von x und Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem für a_{ik}, b_{jl}, c_{jl}.
   (c) Zusätzliche, oft einfachere Gleichungen erhält man, indem man für x spezielle Werte einsetzt, zum Beispiel die Nullstellen von q.

   Beispiel: Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\frac{4x^2}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

Abgabe: Montag, 30. 04. 2001, vor der Vorlesung.