5. Übung Analysis 2 SS 2001

Aufgabe 1: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige:

- $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.
- Sind $F_1, \dots, F_n$ abgeschlossen, so auch $\bigcup_{i=1}^n F_i$.
- Sind F_i abgeschlossen für $i \in I$, so auch $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Aufgabe 2: a) Bestimme in $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$ den Abschluss der offenen Kugel $\mathbb{D} = U(0, 1)$.

Bestimme das Innere von $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

b) Gilt in jedem metrischen Raum (X, d) und für jede offene Kugel $U(x_0, r) \subseteq X$ die Formel

$$U(x_0, r)^- = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}?$$

c) Beweise oder widerlege: Für jede Teilmenge M eines metrischen Raumes ist $(M^\circ)^- = (M^-)^\circ$.

Aufgabe 3: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$.

a) Zeige:

$$M^\circ = \bigcup_{\substack{O \text{ offen,} \\ O \subseteq M}} O.$$

M° ist die größte offene Teilmenge von M .

b) Zeige:

$$M^- = \bigcap_{\substack{F \text{ abgeschlossen,} \\ M \subseteq F}} F.$$

M^- ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von M .

Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Berührungspunkt von M , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in M$ gibt, so dass $d(x, y) < \varepsilon$.

Aufgabe 4: Seien X und K metrische Räume und K kompakt. Sei weiter die Menge $M \subseteq X \times K$ abgeschlossen. Zeige: Dann ist $\{x \in X \mid \exists y \in K \ (x, y) \in M\}$ abgeschlossen.

Aufgabe 5: Integrale rationaler Funktionen, Zusatz. Über $\mathbb{C}$ zerfällt das Nennerpolynom in Linearfaktoren. Es treten dann bei der Partialbruchzerlegung nur die Terme aus Übung 4, Aufgabe 3a) auf. Das sind jetzt komplexwertige Funktionen, zu denen man komplexwertige Stammfunktionen finden kann. Berechne auf diese Art

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

und vergleiche mit dem bekannten Ergebnis.

Bei reellwertigen Funktionen ist der Weg über die *reelle* Partialbruchzerlegung glaube ich einfacher, auch wenn die auftretenden Partialbrüche zunächst komplizierter aussehen. Wer es nicht glaubt, berechne auch noch $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ über die komplexe Partialbruchzerlegung.

Abgabe: Montag, 14. 05. 2001, vor der Vorlesung.