

6. Übung Analysis 2 SS 2001

Aufgabe 1: a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass durch die folgenden Abbildungen $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ Metriken auf X gegeben sind:

$$d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\},$$

$$d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

b) Zeige weiter, dass d_1 und d_2 zu d uniform äquivalent sind.

Hinweis: Man kann auch allgemein zeigen: Sei $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton wachsend, $f^{-1}(0) = \{0\}$ und $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ für alle x, y . Dann ist $f \circ d$ eine Metrik auf X , und die identische Abbildung $\text{id}_X : (X, f \circ d) \rightarrow (X, d)$ ist gleichmäßig stetig. Ist f stetig in 0, so ist auch $\text{id}_X : (X, d) \rightarrow (X, f \circ d)$ gleichmäßig stetig. Welche Funktionen f kann man in obigen Beispielen nehmen?

Aufgabe 2: Wo steckt der Fehler? (Dass die Behauptung falsch ist, ist hoffentlich klar.)

Behauptung: Eine *punktweise* Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis: $d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0))$. Wegen der Stetigkeit von f_n wird der mittlere Term $< \frac{\varepsilon}{3}$ für $d(x, x_0) < \delta$, und wegen der punktweisen Konvergenz wird der erste Term $< \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_x$ und der dritte Term für $n \geq N_{x_0}$. Damit ist die Summe $< \varepsilon$ für $d(x, x_0) < \delta$ und $n \geq \max\{N_x, N_{x_0}\}$. Daraus folgt die Stetigkeit von f in x_0 .

Aufgabe 3: Seien X und Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeige: Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist stetig.
2. Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .
3. Für alle $M \subseteq X$ ist $f(M^-) \subseteq f(M)^-$.

Aufgabe 4: Seien X und K metrische Räume und $f : X \rightarrow K$ eine Abbildung. Zeige:

- a) Ist f stetig, so ist der Graph $G_f = \{(x, y) \in X \times K \mid x \in X \text{ und } y = f(x)\}$ abgeschlossen.
- b) Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.
- c) Ist K jedoch *kompakt* und G_f abgeschlossen, so ist f stetig.
- d) Ist K kompakt, $g : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und die Gleichung $g(x, k) = 0$ für jedes $x \in X$ eindeutig lösbar, so hängt die Lösung stetig von x ab: Es gibt eine stetige Funktion $f : X \rightarrow K$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $g(x, f(x)) = 0$.

Aufgabe 5: Sei X ein metrischer Raum. Beweise oder widerlege:

- a) Für alle $A, B \subseteq X$ ist $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$.
- b) Für alle $A, B \subseteq X$ ist $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.
- c) Für alle $A, B \subseteq X$ ist $(A \cap B)^- = A^- \cap B^-$.
- d) Für alle $A, B \subseteq X$ ist $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Abgabe: Montag, 21. 05. 2001, vor der Vorlesung.

Hinweise zur Klausur: Die Klausur findet am Donnerstag, den 12. 07. 2001 von 9.30 bis 12.30 Uhr in den Hörsälen der Mathematik statt. Für die Zulassung erwarten wir eine aktive Teilnahme an den Übungen. Das schließt die Bereitschaft ein, Aufgaben an der Tafel vorzurechnen. Darüber hinaus sollen mindestens 50% der Übungspunkte erreicht werden.