

## 7. Übung Analysis 2 SS 2001

**Aufgabe 1:** Welche der folgenden Reihen konvergieren? Bzw. für welche Werte der Parameter  $a \in \mathbb{R}$  und  $b > 0$  konvergieren sie?

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^a}$

**Aufgabe 2:** Wie Aufgabe 1.

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\log n}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

**Aufgabe 3:** Sei  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig. Der Raum  $C([a, b])$  der stetigen Funktionen  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei mit der sup-Norm und der dadurch gegebenen Metrik versehen. Zeige: Die Abbildung  $A : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]); f \mapsto [x \mapsto \int_a^x \varphi(f(t)) dt]$  ist Lipschitz-stetig.

**Aufgabe 4:** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt *Häufungspunkt* von  $A$ , falls jede Umgebung von  $x$  einen Punkt  $y \in A \setminus \{x\}$  enthält.

a) Ist jeder Häufungspunkt ein Berührungspunkt? Gib ein Beispiel eines Berührungspunktes, der kein Häufungspunkt ist.

b) Zeige:  $A^- = A \cup \{x \in X \mid x \text{ ist ein Häufungspunkt von } A\}$ .

c) Gib je ein Beispiel einer nichtleeren Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , die

- genau aus ihren Häufungspunkten besteht,
- abgeschlossen ist, aber keine Häufungspunkte hat,
- offen ist, aber durch Hinzufügen eines einzigen Punktes abgeschlossen wird.

**Aufgabe 5: Zur Konstruktion von  $\mathbb{R}$ .**

a) Wie kann man die Begriffe *Nullfolge* und *Cauchyfolge* definieren, ohne jemals auf die reellen Zahlen Bezug zu nehmen, sondern nur auf die rationalen?

b) Zwei Cauchyfolgen  $(a_n)$  und  $(b_n) \in CF(\mathbb{Q})$  heißen äquivalent, falls  $(a_n - b_n)$  eine Nullfolge ist. Zeige:

- Diese Äquivalenz ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation.
- Definiert man auf den Äquivalenzklassen eine Addition und Multiplikation durch  $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$ ,  $[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)]$ , so sind diese wohldefiniert.
- Ist  $(a_n)$  eine Cauchyfolge, aber keine Nullfolge, so hat  $[(a_n)]$  ein multiplikatives Inverses.

Auf diese Art kann man alle Körperaxiome nachrechnen. Definiert man noch eine Ordnung wie in der Vorlesung angegeben, so gelangt man zu einem *Modell* der Axiome der reellen Zahlen.

**Abgabe:** Montag, 28. 05. 2001, vor der Vorlesung.

**Hinweis:** Wegen des Feiertags fallen am Donnerstag, den 24. 05. 2001, die Übungen aus. Ersatzweise findet am Freitag um 14 Uhr eine Saalübung im Hörsal III statt.