

8. Übung Analysis 2 SS 2001

Aufgabe 1: Welche der folgenden Reihen konvergieren? Liegt absolute Konvergenz vor?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{e^{n^2}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Aufgabe 2: Wie Aufgabe 1.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^{3/4}}$

Aufgabe 3: Zeige: Ist die Folge der positiven Zahlen a_n wachsend und beschränkt, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right).$$

Aufgabe 4: Gegeben sei eine Folge positiver Zahlen a_n . Das Wurzelkriterium besagt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ ist.

a) Zeige folgende Verschärfung: Ist $\sqrt[n]{a_n} > 1$ für unendlich viele n , so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ schon divergent.

b) Warum ist das eine Verschärfung? Gib ein Beispiel einer Folge positiver Zahlen b_n an, so dass zwar $b_n > 1$ für unendlich viele n , aber nicht $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$ ist.

Aufgabe 5: Seien X, Y metrische Räume und $x_0 \in X$. Eine Folge von Funktionen $f_n : X \rightarrow Y$ heißt *gleichgradig stetig in x_0* , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad d(x, x_0) < \delta \quad \rightarrow \quad d(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon.$$

Zeige: Ist die Funktionenfolge (f_n) gleichgradig stetig in x_0 und punktweise konvergent gegen f , so ist f stetig in x_0 .

Die Stetigkeit der Grenzfunktion bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Man kann also zwei Grenzprozesse vertauschen. Dies ist möglich, wenn entweder der Grenzprozess $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig ist bezüglich x (d. h. für alle x gleich schnell verläuft; gleichmäßige Konvergenz der Folge), oder der Grenzprozess $x \rightarrow x_0$ gleichmäßig ist bezüglich n (d. h. für alle n gleich schnell verläuft; gleichgradige Stetigkeit der Folge in x_0).

Abgabe: Wegen des Feiertags ist nächsten Montag keine Abgabe möglich. Abgabe ist statt dessen am Dienstag, den 5. 6. 2001, von 9.00 bis 11.15 Uhr vor Zimmer 304.