## 1. Übung Funktionentheorie SS 2002

**Aufgabe 1:** Bestimme Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen. Dabei sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x,\ y \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{z^3}, \qquad \frac{1}{3z+5}, \qquad \frac{z+2}{3z-7}, \qquad (1+\mathrm{i})^4.$$

**Aufgabe 2:** Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 1$. Vereinfache:

$$|1+z|^2 + |1-z|^2.$$

**Aufgabe 3:** $\mathbb{C}$ ist als Körper ein eindimensionaler Vektorraum über sich selbst, aber auch ein zweidimensionaler *reeller* Vektorraum mit $\mathbb{R}$-Basis $\mathscr{B} = \{1, \mathrm{i}\}$. Sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeige: Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $T$ ist $\mathbb{C}$-linear,

b) $T$ ist $\mathbb{R}$-linear, und die Darstellungsmatrix von $T$ bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ ist von der Form $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$,

c) es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $Tz = \lambda \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wie hängt $\lambda$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ zusammen?

**Aufgabe 4:** Es seien $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$. Zeige:

$$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l \geqslant 0.$$

**Aufgabe 5:** Es seien $z_1, \ldots z_n,\ w_1, \ldots w_n \in \mathbb{C}$. Zeige:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2}.$$

**Abgabe:** Montag, 22. 04. 2002, vor der Vorlesung.

**Und was sonst noch zu sagen ist:** Für jede Übungsaufgabe gibt es 4 Punkte. Zur Klausur wird zugelassen, wer mindestens die Hälfte aller Übungspunkte erhalten und aktiv an den Übungen teilgenommen hat. Die Übungen können von *festen* Arbeitsgruppen, bestehend aus maximal zwei natürlichen Personen, gemeinsam abgegeben werden. Die Übungsblätter und aktuelle Informationen sind auch immer auf der Internetseite zur Vorlesung zu finden: **www.math.uni-sb.de/˜ag-wittstock/lehre/SS02/ft/**.
Die Vorlesung wird betreut von Benedikt Betz (Zimmer 304, benedikt@math.uni-sb.de). Feedback ist — wie immer — erwünscht.