10. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 48: Berechne $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$.
Hinweis: Betrachte folgende geschlossene Kurve: Geradenstück von $\frac{\mathrm{i}}{R}$ nach $R+\frac{\mathrm{i}}{R}$, auf dem Kreis um Null mit Radius R nach $R-\frac{\mathrm{i}}{R}$, Geradenstück nach $\frac{-\mathrm{i}}{R}$, Halbkreis mit Radius $\frac{1}{R}$.

Aufgabe 49: Zeige: Für ein Gebiet G sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in G und jede holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

(2) Jede holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion.

(3) Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ hat einen holomorphen Logarithmus.

(4) Für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in G und jeden Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus G$ ist die Windungszahl von γ bezüglich a gleich Null.

((1)⇒(2): Vgl. Staatsexamen Sommer 1999 Teil a. Teile b und c sollten dann auch kein Problem mehr sein.)

Aufgabe 50: **a)** Zeige: Ist G ein Gebiet und die holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ nicht konstant, so ist $f(G)$ wieder ein Gebiet. (***Gebietstreue.***)
Hinweis: Es gibt eine Kreisscheibe in G, auf der f genau einmal den Wert w_0 annimmt; Minimumprinzip angewandt auf $f - w$, wobei w nahe bei w_0 ist.
b) Umgekehrt lässt sich aus der Gebietstreue nicht konstanter, holomorpher Funktionen leicht das Maximumprinzip gewinnen. Wie?
c) (Staatsexamen Sommer 2000, Teil c.) Sind $g: G_1 \to G_2$ und $f: G_2 \to \mathbb{C}$ holomorph und ist $f \circ g = 0$, so ist g konstant oder $f = 0$.

Aufgabe 51: (Staatsexamen Winter 1998/99, Teil a, Winter 1999/00 Teile a, b.) Sei $f: \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ stetig, $f|_{\mathbb{D}}$ holomorph und $|f(z)| = 1$ für alle z mit $|z| = 1$. Zeige: f ist entweder konstant oder hat eine Nullstelle in $\mathbb{D}$. Kann es unendlich viele Nullstellen geben?

Aufgabe 52: Ist f eine nicht konstante, ganze Funktion, so ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 53: (Staatsexamen Sommer 1998) Sind f, g ganze Funktionen und ist $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ für alle z, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $f = \lambda g$.
(Hinweis: Klassifiziere die Singularitäten von $\frac{f}{g}$.

Abgabe: Montag, 24. 06. 2002, vor der Vorlesung.