

11. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 54: Für eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) f ist komplex differenzierbar.
- (2) f ist stetig komplex differenzierbar.
- (3) f ist stetig, und für jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$ ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.
- (4) f ist stetig und hat lokal Stammfunktionen.
- (5) f ist stetig, und für jede Kreisscheibe $B \subseteq G$ und $z \in B$ ist $f(z) = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.
- (6) f ist analytisch, das heißt, lässt sich lokal als Potenzreihe darstellen.

Finde möglichst viele Implikationen (nur solche auf direktem Wege, das heißt, ohne Umweg über eine dritte Aussage), die bereits bekannt sind. Gibt es noch Lücken? Falls ja, versuche, diese zu schließen.

Aufgabe 55: a) Zeige mit Hilfe von Aufgabe 54, Aussage (3): Ist $g : [0, 1] \times G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und ist für jedes $t \in [0, 1]$ die Funktion $z \mapsto g(t, z)$ holomorph, so ist die Funktion

$$f : G \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \int_0^1 g(t, z) dt$$

holomorph.

b) Vergleiche entsprechende Sätze für reell (stetig) differenzierbare Funktionen. Wo ist der Unterschied in den Voraussetzungen?

Aufgabe 56 (Satz von Rouché): Bestimme die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) der Funktion

$$f(z) = z^{55} + 12z^{51} - 256z^7 + z - 11$$

- a) im offenen Einheitskreis $\{z \mid |z| < 1\}$,
- b) im offenen Kreisring $\{z \mid 1 < |z| < \frac{3}{2}\}$,
- c) im offenen Kreisring $\{z \mid \frac{3}{2} < |z| < 2\}$.

Aufgabe 57: (Staatsexamen Winter 1995/95, Teil a.) Sei f wie in Aufgabe 51 und nicht konstant. Es sei zusätzlich vorausgesetzt, dass f sogar auf einem \bar{D} enthaltenden Gebiet holomorph ist. Bestimme das Bild von D unter f . (Hinweis: Satz von Rouché.)

Aufgabe 58: a) (Staatsexamen Winter 1999/2000, Teil c.) Sei f wie in Aufgabe 51 und nicht konstant. Zeige: f ist rational.

Hinweis: Betrachte $\frac{1-\bar{a}z}{z-a}$ für $|z| = 1$, $|a| < 1$.

b) Welche Gestalt hat f , wenn $f|_D$ zusätzlich als injektiv vorausgesetzt wird?

Abgabe: Montag, 01. 07. 2002, vor der Vorlesung.