

12. und letzte Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 59: Die Zusatzvoraussetzung in Aufgabe 57 ist redundant.

Aufgabe 60: (Vgl. Staatsexamen Sommer 1995.) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = \infty$?

Aufgabe 61: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die biholomorphen Abbildungen $f : G \rightarrow G$ (das heißt, f bijektiv, f, f^{-1} holomorph) nennt man *Automorphismen* von G . $\text{Aut}(G)$ bezeichne die Menge aller Automorphismen von G . Diese bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition. (Warum?) In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Automorphismen von \mathbb{D} genau die Funktionen aus Aufgabe 58 b sind.

- Gebrochen lineare Funktionen der Form $c \frac{z-a}{az-1}$ mit $|a| < 1, |c| = 1$ sind Automorphismen von \mathbb{D} .
- Ist $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(0) = 0$, so ist $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. (Maximumprinzip angewandt auf $\frac{f(z)}{z}$ und Kreisscheiben mit Mittelpunkt 0 und Radius r .)
- Ist f ein Automorphismus von \mathbb{D} und $f(0) = 0$, so ist $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Daraus folgt: $f(z) = cz$ mit $|c| = 1$.
- Jeder Automorphismus von \mathbb{D} ist von der Form wie in a) angegeben.

Aufgabe 62: Bestimme $\text{Aut}(\mathbb{H})$. (Hinweis: Eine frühere Übungsaufgabe (welche?) erlaubt es, diese Aufgabe auf die vorige zurückzuführen.)

Aufgabe 63: Wo wir gerade dabei sind: $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.

Hinweis: $f(\frac{1}{z})$ hat in 0 keine wesentliche Singularität (CASAROTI-WEIERSTRASS). Verallgemeinere dann Aufgabe 29 c, um zu zeigen, dass f ein Polynom ist.

Abgabe: Montag, 08. 07. 2002, vor der Vorlesung.

Klausur: Wer an der Klausur am Montag, dem 15. 07. 2002, 9:30 – 12:30 Uhr, Hörsaal I, teilnehmen möchte, melde sich **in den Übungen** an, sofern dies noch nicht geschehen ist. Ich werde dann nächste Woche die Liste derer aushängen, die zur Klausur zugelassen sind.

Bei der Klausur ist als Hilfsmittel ein handbeschriebenes DIN-A3-Blatt erlaubt.

Seien Sie schon um 9:15 Uhr da, damit wir pünktlich anfangen können.

Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift (**kein Bleistift oder Rotstift!**).

Die Klausur wird sieben Aufgaben umfassen. Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Mit 27 Punkten haben Sie bestanden.

Lesen Sie sich auch die weiteren Hinweise unter

<http://www.math.uni-sb.de/~ag-wittstock/lehre/SS02/ft/>
durch.