12. und letzte Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 59: Die Zusatzvoraussetzung in Aufgabe 57 ist redundant.

Aufgabe 60: (Vgl. Staatsexamen Sommer 1995.) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{|z|\to 1} |f(z)| = \infty$?

Aufgabe 61: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die biholomorphen Abbildungen $f : G \to G$ (das heißt, f bijektiv, f, f^{-1} holomorph) nennt man *Automorphismen* von G. $\mathrm{Aut}(G)$ bezeichne die Menge aller Automorphismen von G. Diese bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition. (Warum?) In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Automorphismen von $\mathbb{D}$ ganau die Funktionen aus Aufgabe 58 b sind.

a) Gebrochen lineare Funktionen der Form $c\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ mit $|a| < 1$, $|c| = 1$ sind Automorphismen von $\mathbb{D}$.

b) Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(0) = 0$, so ist $|f(z)| \leqslant |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. (Maximumprinzip angewandt auf $\frac{f(z)}{z}$ und Kreisscheiben mit Mittelpunkt 0 und Radius r.)

c) Ist f ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ und $f(0) = 0$, so ist $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Daraus folgt: $f(z) = cz$ mit $|c| = 1$.

d) Jeder Automorphismus von $\mathbb{D}$ ist von der Form wie in a) angegeben.

Aufgabe 62: Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. (Hinweis: Eine frühere Übungsaufgabe (welche?) erlaubt es, diese Aufgabe auf die vorige zurückzuführen.)

Aufgabe 63: Wo wir gerade dabei sind: $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.
Hinweis: $f(\frac{1}{z})$ hat in 0 keine wesentliche Singularität (Casaroti-Weierstrass). Verallgemeinere dann Aufgabe 29 c, um zu zeigen, dass f ein Polynom ist.

Abgabe: Montag, 08. 07. 2002, vor der Vorlesung.

Klausur: Wer an der Klausur am Montag, dem 15. 07. 2002, 9:30 – 12:30 Uhr, Hörsaal I, teilnehmen möchte, melde sich **in den Übungen** an, sofern dies noch nicht geschehen ist. Ich werde dann nächste Woche die Liste derer aushängen, die zur Klausur zugelassen sind.
Bei der Klausur ist als Hilfsmittel ein handbeschriebenes DIN-A3-Blatt erlaubt.
Seien Sie schon um 9:15 Uhr da, damit wir pünktlich anfangen können.
Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift (**kein Bleistift oder Rotstift!**).
Die Klausur wird sieben Aufgaben umfassen. Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte. Mit 27 Punkten haben Sie bestanden.
Lesen Sie sich auch die weiteren Hinweise unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag-wittstock/lehre/SS02/ft/`
durch.