2. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 6: Zeige, dass folgende Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar sind. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist das Differential $\mathbb{C}$-linear?

$f(z) = z^2, \qquad f(z) = \bar{z}, \qquad f(z) = z|z|^2, \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{\bar{z}} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}.$

Aufgabe 7: Für welche a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ ist

$$f(z = x + \mathrm{i}y) = x^2 + 2axy + by^2 + \mathrm{i}(cx^2 + 2dxy + y^2)$$

auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar? Schreibe in diesem Fall f als Polynom in z.

Aufgabe 8: Berechne das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin(x)}$$

durch Umformen in ein Integral der Form

$$\int_{K(0,1)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Berechne dann $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin(x)}$

Aufgabe 9 (gebrochen lineare Funktionen): Zu einer invertierbaren Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ setzen wir für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f_A(z) &= \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{falls } cz + d \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } cz + d = 0 \end{cases} \\ \text{sowie} \quad f_A(\infty) &= \begin{cases} \frac{a}{c}, & \text{falls } c \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(Also „$\frac{1}{0} = \infty$“.). f_A ist damit eine Funktion $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Zeige: Für A, $B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ist $f_{AB} = f_A \circ f_B$.
Für welche $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ist $f_A = id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$?
$f_A|_{\mathbb{C}}$ ist komplex differenzierbar. Berechne die Ableitung.

Aufgabe 10: Seien $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Zeige: Die gebrochen lineare Funktion $z \mapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ bildet $\mathbb{H}$ bijektiv auf $\mathbb{D}$ ab.

Abgabe: Montag, 29. 04. 2002, vor der Vorlesung.