

3. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 11: Berechne folgende Wegintegrale. Dabei kommen folgende Wege vor:

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad t \mapsto t + it, \\ \gamma_2 : \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right] &\rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad t \mapsto \sqrt{2} \cdot e^{it}.\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_1} z \, dz, \quad \int_{\gamma_1} \bar{z} \, dz, \quad \int_{\gamma_2} z \, dz, \quad \int_{\gamma_2} \bar{z} \, dz, \quad \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}, \quad \int_{\gamma_2} \frac{dz}{\bar{z}}.$$

Aufgabe 12: Hat die Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \bar{z}$ eine Stammfunktion?

Aufgabe 13: Ergänzung zu Aufgabe 9: Sei $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

a) Eine Funktion $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar im Punkt ∞ , falls

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \begin{cases} f(z^{-1}), & \text{falls } z \neq 0 \\ f(\infty), & \text{falls } z = 0 \end{cases} \quad \text{in } 0 \text{ komplex differenzierbar ist.}$$

Zeige: Gebrochen lineare Funktionen sind komplex differenzierbar in allen Punkten, in denen sie nicht den Wert ∞ annehmen.

b) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ oder $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ mit $f(z_0) = \infty$ heißt komplex differenzierbar in z_0 , falls es eine Umgebung U von z_0 gibt, auf der f nicht den Wert ∞ annimmt, und falls

$$\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } f(z) = \infty \\ f(z)^{-1}, & \text{falls } f(z) \neq \infty \end{cases} \quad \text{in } z_0 \text{ komplex differenzierbar ist.}$$

Zeige: Gebrochen lineare Funktion $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ sind überall komplex differenzierbar.

Aufgabe 14: Betrachte folgende Abbildung von $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ nach $\bar{\mathbb{C}}$, die *stereographische Projektion*:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, & \text{falls } x_3 \neq 1 \\ \infty, & \text{falls } x_3 = 1 \end{cases}.$$

Geometrische Deutung? Zeige: Die stereographische Projektion ist bijektiv.

Hinweis zum Finden der Umkehrabbildung: $1 - x_3 = \frac{2}{|z|^2 + 1}$.

Aufgabe 15: Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z = x + iy \mapsto \sqrt{|xy|}$. Zeige: f ist in 0 partiell differenzierbar, und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind dort erfüllt. Ist f in 0 komplex differenzierbar?

Aufgabe 16: Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Außerdem sei u harmonisch, das heißt, $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Zeige, dass die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto u_x(z) - iu_y(z)$ komplex differenzierbar ist.

Abgabe: Montag, 06. 05. 2002, vor der Vorlesung.