3. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 11: Berechne folgende Wegintegrale. Dabei kommen folgende Wege vor:

$$\gamma_1 : [-1,1] \to \mathbb{C} \quad ; \quad t \mapsto t + \mathrm{i}t,$$
$$\gamma_2 : [\frac{-3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi] \to \mathbb{C} \quad ; \quad t \mapsto \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

$$\int_{\gamma_1} z\,dz, \qquad \int_{\gamma_1} \bar{z}\,dz, \qquad \int_{\gamma_2} z\,dz, \qquad \int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz, \qquad \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}, \qquad \int_{\gamma_2} \frac{dz}{\bar{z}}.$$

Aufgabe 12: Hat die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto \bar{z}$ eine Stammfunktion?

Aufgabe 13: Ergänzung zu Aufgabe 9: Sei $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
a) Eine Funktion $f : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar im Punkt ∞, falls
$\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto \begin{cases} f(z^{-1}), & \text{falls } z \neq 0 \\ f(\infty), & \text{falls } z = 0 \end{cases}$ in 0 komplex differenzierbar ist.
Zeige: Gebrochen lineare Funktionen sind komplex differenzierbar in allen Punkten, in denen sie nicht den Wert ∞ annehmen.
b) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$ oder $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ mit $f(z_0) = \infty$ heißt komplex differenzierbar in z_0, falls es eine Umgebung U von z_0 gibt, auf der f nicht den Wert 0 annimmt, und falls $\tilde{f} : U \to \mathbb{C};\ z \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } f(z) = \infty \\ f(z)^{-1}, & \text{falls } f(z) \neq \infty \end{cases}$ in z_0 komplex differenzierbar ist.
Zeige: Gebrochen lineare Funktion $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ sind überall komplex differenzierbar.

Aufgabe 14: Betrachte folgende Abbildung von $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 = 1\}$ nach $\bar{\mathbb{C}}$, die *stereographische Projektion*:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}, & \text{falls } x_3 \neq 1 \\ \infty, & \text{falls } x_3 = 1 \end{cases}.$$

Geometrische Deutung? Zeige: Die stereographische Projektion ist bijektiv.
Hinweis zum Finden der Umkehrabbildung: $1 - x_3 = \frac{2}{|z|^2+1}$.

Aufgabe 15: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z = x + \mathrm{i}y \mapsto \sqrt{|xy|}$. Zeige: f ist in 0 partiell differenzierbar, und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind dort erfüllt. Ist f in 0 komplex differenzierbar?

Aufgabe 16: Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $u : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Außerdem sei u *harmonisch,* das heißt, $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
Zeige, dass die Funktion $f : G \to \mathbb{C};\ z \mapsto u_x(z) - \mathrm{i}u_y(z)$ komplex differenzierbar ist.

Abgabe: Montag, 06. 05. 2002, vor der Vorlesung.