

4. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 17: Wir definieren eine Funktion $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

a) Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe?

b) Zeige mit Hilfe des Cauchyprodukts von Reihen:

$$\begin{aligned} E(z+w) &= E(z) \cdot E(w), \\ \operatorname{Re} E(z) &= e^x \cos y \quad \text{für } z = x + iy, \\ \operatorname{Im} E(z) &= e^x \sin y \quad \text{für } z = x + iy. \end{aligned}$$

Mit welcher in der Vorlesung eingeführten Funktion stimmt E also überein?

Aufgabe 18 Additionstheoreme): Finde mit Hilfe von Aufgabe 17 Formeln, die folgende reelle Terme als Polynome in $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ und $\cos y$ darstellen:

$$\sin(x \pm y), \quad \cos(x \pm y), \quad \sin(3x), \quad \cos(3y).$$

(Die Lösung steht in jeder Formelsammlung. Hier geht es um eine möglichst einfach zu merkende *Herleitung*.)

Aufgabe 19: a) Wie sieht das Bild des Quaders $\{z = x + iy \mid a < x < b \text{ und } \varphi < y < \psi\}$ unter $\exp$ aus? Wie das Bild von $\{z \mid \alpha - \pi < \operatorname{Im} z < \alpha + \pi\}$? Und $\{z \mid \alpha - \pi < \operatorname{Im} z \leq \alpha + \pi\}$? (Dabei seien $a, b, \varphi, \psi, \alpha \in \mathbb{R}$.)

b) Zeige: $\exp$ ist auf $\{z = x + iy \mid -\pi < y \leq \pi\}$ injektiv.

Die Umkehrabbildung $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ nennt man $\log$, den *Hauptzweig des komplexen Logarithmus*. Weiter definiert man für $a \in \mathbb{C}$ den *Hauptzweig der Potenzfunktion* z^a als $z^a = \exp(a \log z)$.

c) Berechne i^i , $\log(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i)$ und e^a .

d) Die Funktionen $z \mapsto \log(z) + 2\pi i k$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ heißen *Nebenzweige* des Logarithmus. Mit diesen sind Nebenzweige der Potenzfunktionen erklärt. Wieviele verschiedene Zweige hat die n te Wurzel $z^{\frac{1}{n}}$?

e) Berechne $\sqrt{-1}$ und $\sqrt{i}$ (Hauptzweig) sowie alle dritten Wurzeln von 1 (Hauptzweig und Nebenzweige).

Aufgabe 20: Was ist hier falsch?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

Aufgabe 21: Finde die Laurentreihenentwicklungen folgender Funktionen auf dem Kreisring $\{z \mid r \leq |z| \leq R\}$ mit den angegebenen Radien r, R .

a) $\exp(z) + \exp(z^{-1}) - 1$ für $r = 0, R = \infty$,

b) $\frac{1}{z(z-1)}$ für $r = 0, R = 1$ und für $r = 1, R = \infty$,

c) $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ für $r = 0, R = 1$, für $r = 1, R = 2$ und für $r = 2, R = \infty$,

d) $\frac{\exp z}{z^2}$ für $r = 0, R = \infty$.

Abgabe: Montag, 13. 05. 2002, vor der Vorlesung.