5. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 22 (Residuenbestimmung): Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Bestimme

$$\operatorname{Res}(\frac{f(z)}{z-z_0}, z_0) \qquad \text{(Pol höchstens erster Ordnung)},$$
$$\operatorname{Res}(\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}, z_0) \qquad \text{(Pol höchstens zweiter Ordnung)}.$$

»Auf meine Frage, ob die Pole in den Anwendungen vielleicht immer von erster Ordnung seien, antwortete mir ein Physiker: Oh nein, es kommen auch Pole zweiter Ordnung manchmal vor, und dann werden bei der Residuenbestimmung leicht Fehler gemacht ... « (JÄNICH, Analysis für Physiker und Ingenieure, S. 109.)

Aufgabe 23: Berechne $\operatorname{Res}(f, z_0)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ und alle Funktionen f aus Aufgabe 21 sowie für $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Aufgabe 24 (harmonische Funktionen): Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und zweimal reell differenzierbar (Dies folgt schon aus der Holomorphie, wie wir noch sehen werden.). Zeige: $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind harmonisch (vgl. Aufg. 16).

Aufgabe 25: Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeige:
a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $u = \operatorname{Re} f$.
b) Es gibt eine harmonische Funktion $v : G \to \mathbb{R}$, so dass $u + \mathrm{i}v$ holomorph ist.
c) f bzw. v sind eindeutig bis auf eine rein imaginäre bzw. reelle additive Konstante.

Aufgabe 26: a) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar und $\tilde{G} = \{\bar{z} \mid z \in G\}$. Weiter sei $\tilde{f} : G \times \tilde{G} \to \mathbb{C}$ eine partiell holomorphe Funktion (es sollte klar sein, was das heißt), so dass $f(z) = \tilde{f}(z, \bar{z})$. Dann setzt man für $z_0 \in G$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_o) = \partial f(z_0) = \right) \left.\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right|_{z=z_o} := \left.\frac{\partial \tilde{f}(w_1, w_2)}{\partial w_1}\right|_{(w_1,w_2)=(z,\bar{z})} \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_o) = \bar{\partial} f(z_0) = \right) \left.\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_o} := \left.\frac{\partial \tilde{f}(w_1, w_2)}{\partial w_2}\right|_{(w_1,w_2)=(z,\bar{z})} .$$

Zeige: $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y})$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y})$.
b) Falls man keine solche Funktion $\tilde{f}$ zur Hand hat, definiert man $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ durch diese Formeln (und motiviert dies dann durch die Zerlegung $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, wobei $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, $dz = dx + \mathrm{i}dy$, $d\bar{z} = dx - \mathrm{i}dy$, nachrechnen!)
Zeige: f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn $\frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} = 0$ ist.
c) Rechne mit Hilfe von a) erneut nach: $f(z) = \frac{z^3}{\bar{z}}$ $(z \neq 0)$ ist nicht komplex differanzierbar.

Abgabe: Wegen Pfingsten ausnahmsweise am Dienstag, dem 20. 05. 2002, vor der Vorlesung.