6. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 27: Bestimme mit Hilfe des Residuenkalküls:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, **c)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(-\mathrm{i}t)\exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,dt.$

Aufgabe 28: Sei $R > 1$. Der Weg γ sei aus zwei Teilen

$$\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C};\ t \mapsto t, \qquad \gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C};\ t \mapsto R\mathrm{e}^{it}$$

zusammengesetzt.

a) Berechne $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$.

b) Zeige: $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$

c) Folgere: $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}$ existiert. Was ist der Grenzwert?

d) Warum existiert $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ und ist gleich dem Grenzwert aus c)?

Das Ergebnis ist natürlich aus der reellen Analysis bekannt. Dieses Verfahren ist aber auch auf Funktionen anwendbar, bei denen man nicht so leicht eine Stammfunktion angeben kann.

Aufgabe 29: a) (Cauchy-Abschätzungen) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ auf einer Kreisscheibe $\{z \mid |z-z_0| < R\}$ konvergent und $0 < r < R$. Zeige: Dann ist

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{r^n} \sup\{|f(z)| \mid |z-z_0| = r\}.$$

b) (Satz von Liouville) Folgere: Ist f durch eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe darstellbar, (eine *ganze Funktion,* wie man sagt,) so ist f konstant.

c) Ist f eine ganze Funktion und für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| \leqslant A|z| + B \qquad \text{mit } A,\, B \in \mathbb{R},$$

so ist f ein Polynom ersten Grades.

Aufgabe 30: Seien $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Zeige:

a) Es gibt eine gebrochen lineare Transformation, die z_1 auf 0, z_2 auf 1 und z_3 auf ∞ abbildet.

b) Diese ist eindeutig.

c) Sind auch $w_1,\, w_2,\, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, so gibt es genau eine gebrochen lineare Transformation, die z_i auf w_i $(i = 1,\, 2,\, 3)$ abbildet.

Aufgabe 31: Was läßt sich ohne Rechnung über den Konvergenzradius der Taylorreihe von $f(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{1+x^2}}$ um den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ sagen?

Abgabe: Montag, 27. 05. 2002, vor der Vorlesung.