7. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 32: a) Seien P, Q Polynome und der Grad von Q mindestens um zwei größer als der von P. Q habe keine Nullstellen auf der reellen Achse. Zeige:

Dann ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}\,(\frac{P}{Q}, a)$.

Hinweis: Aufgabe 28.

b) Berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Aufgabe 33: a) Seien P, Q Polynome und der Grad von Q größer als der von P. Q habe keine Nullstellen auf der reellen Achse. Zeige:

Dann ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}\,(\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}, a)$.

Hinweis: Hier ist als Hilfsweg das Rechteck mit den Ecken $-R$, R, $R+\mathrm{i}R$, $-R+\mathrm{i}R$ geeignet.

b) Berechne $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}$. (Obwohl es auf den ersten Blick vielleicht nicht so aussieht, hilft hier Teil a).)

Aufgabe 34: Sei P ein Polynom vom Grad n. Zeige: Liegen alle Nullstellen von P in $\{z \mid |z| < r\}$, so gilt:

$$2\pi\mathrm{i}n = \int_{|z|=r} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz,$$

wobei die Kreislinie $|z| = r$ einmal im positiven Sinne durchlaufen werden soll.

Aufgabe 35: Zeige:

a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$. Lässt sich eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ darstellen als $f(z) = (z-a)^n h(z)$ mit einer holomorphen Funktion h, so dass $h(a) \neq 0$ ist, so gibt es eine Umgebung U von a, so dass f auf U keine Nullstellen außer a hat.

(≫Nullstellen endlicher Ordnung liegen isoliert.≪)

b) (Identitätssatz) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $M \subseteq G$ eine Menge, die einen Häufungspunkt $a \in G$ hat, und seien f_1, $f_2 : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist dann $f_1(z) = f_2(z)$ für alle $z \in M$, so stimmen f_1 und f_2 auf ganz G überein.

Hinweis: Wende a) an auf $f = f_1 - f_2$ und führe die Annahme, dass mindestens ein Taylor-Koeffizient von f ungleich Null ist, zum Widerspruch.

Aufgabe 36: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige: Gibt es für alle $a \in G$ ein $k \in \mathbb{N}$, so dass in der Entwicklung $f(z) = \sum c_n (z-a)^n$ der Koeffizient $c_k = 0$ ist, so ist f ein Polynom.

Abgabe: Montag, 03. 06. 2002, vor der Vorlesung.