8. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 37: Sei G ein sternförmiges Gebiet und $0 \notin G$.
a) Zeige: Es gibt eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, so dass $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ ist. (Man nennt ein solches f einen *Logarithmus* für G.)
Hinweis: Wie sehen maximal große Gebiete mit den angegeben Eigenschaften aus?
b) Finde einen Funktionsterm für einen Logarithmus der positiv geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$.
c) Ist der Hauptzweig $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\}$ des Logarithmus (Aufg. 19) in diesem Sinne ein Logarithmus des Gebiets $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Aufgabe 38: Gibt es ein Gebiet G und eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften?
a) $0 \in G$ und $f(\frac{1}{n^{2002}}) = 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, aber $f \neq 0$,
b) $f^{(n)}(z_0) = (n!)^2$ für ein $z_0 \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$,
c) $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
d) $0 \in G$ und $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
e) $G = \mathbb{D}$ und $f^{(n)}(0) = n \cdot n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
f) $G = \mathbb{C}$, $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2^{n^2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^m} = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Hier sind unterschiedliche Techniken erforderlich. Nützlich ist der Identitätssatz aus Aufg. 35 sowie eine naheliegende Verallgemeinerung von Aufg. 29c.

Aufgabe 39: Klassifiziere die Singularität an der Stelle 0. Ist sie hebbar, so hebe sie, handelt es sich um einen Pol, so bestimme den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung um 0, ist sie wesentlich, so bestimme das Bild von $\{z \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ unter f für kleines $\varepsilon > 0$.
a) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$, **b)** $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, **c)** $f(z) = \cos(\frac{1}{z})$, **d)** $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.
Dabei sind cos, sin durch dieselben Potenzreihen definiert wie im Reellen.

Aufgabe 40: Berechne $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ mit Hilfe des Residuensatzes.
Anleitung: Betrachte den folgenden Integrationsweg: γ_1 von 0 bis R entlang der reellen Achse, γ_2: Kreisbogen mit Radius R, Winkel von 0 bis $\frac{2\pi}{3}$, γ_3: auf geradem Weg zum Nullpunkt zurück. $\int_{\gamma_3}$ geht zwar nicht gegen 0, aber ...

Aufgabe 41: Man sagt, eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ habe lokal Stammfunktionen, wenn es zu jedem Punkt $z_0 \in G$ eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass $f|_U$ eine Stammfunktion hat. Zeige:
a) Jede stetig komplex differenzierbare Funktion hat lokal Stammfunktionen.
b) Hat eine stetige Funktion f lokal Stammfunktionen, so ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes Dreieck Δ, das ganz in G liegt. Dabei ist $\partial\Delta$ der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Rand des Dreiecks.
Hinweis: Dreiecke sind kompakt, und man kann sie auf übersichtliche Weise in kleinere Dreiecke zerlegen, die dann jeweils ganz in einer der endlich vielen ...

Abgabe: Montag, 10. 06. 2002, vor der Vorlesung.