

9. Übung Funktionentheorie SS 2002

Aufgabe 42 (Residuenberechnung): a) Seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$, $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$. Zeige: Dann ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

b) Bestimme $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^5}, z_0\right)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. (Damit ist die Staatsexamensaufgabe Winter 1997/98 lösbar, vgl. Aufg. 40.)

Aufgabe 43: Zeige: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Schon bekannte Hilfswege sind hier durch einen kleinen Halbkreisbogen γ_r mit Radius r um die Null zu ergänzen. $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz$ lässt sich auf folgende Art berechnen:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = 0, \quad \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = ?$$

Aufgabe 44: Man sagt, eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ habe einen *holomorphen Logarithmus*, wenn es eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $z \in G$ gilt:

$$e^{g(z)} = f(z).$$

a) Berechne $g'(z)$.

b) Zeige: Eine nullstellenfreie holomorphe Funktion f hat genau dann einen holomorphen Logarithmus, wenn $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion hat.

c) Gib damit einen neuen Beweis der Aussage in Aufg. 37a.

d) Hat

$$f : \mathbb{C} \setminus [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}; \quad z \mapsto \frac{z}{z-1}$$

einen holomorphen Logarithmus? Gib gegebenenfalls einen an.

Aufgabe 45: (Staatsexamen Winter 1998/99 Teil b.) a) Zeige: Die Nullstellen von $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind genau die ganzzahligen Vielfachen von π .

b) Berechne $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{\sin z} dz$.

c) Hat $\sin : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{C}$ einen holomorphen Logarithmus?

Aufgabe 46: Hat eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ einen holomorphen Logarithmus, so hat sie auch eine holomorphe Wurzel, das heißt, es gibt eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g^2 = f$.

Aufgabe 47: (Staatsexamen Winter 2001/02, Teil c.) Sei f eine ganze Funktion. Zeige: Ist $\operatorname{Re} f$ beschränkt, so ist f konstant. Gilt das auch, wenn $\operatorname{Im} f$ beschränkt ist?

Abgabe: Montag, 17. 06. 2002, vor der Vorlesung, die an diesem Termin **ausnahmsweise im Hörsaal IV** stattfindet.