

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: (4P) Man gebe für die folgenden Experimente Wahrscheinlichkeitsräume an:

a) Wurf mit einer homogenen Münze, b) Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln, c) Wurf mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln, d) Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln. Die Kugeln seien gut gemischt und nur farblich unterscheidbar.

Aufgabe 2: (4P) Wie sehen in den Wahrscheinlichkeitsräumen für die Experimente in den Aufgaben 1.b) und 1.c) die Ereignisse a) die Augensumme ist gleich 3, b) die Augensumme ist gleich 7, c) die Augensumme ist durch 4 teilbar, d) die Augensumme ist gleich 1 aus? Wie groß sind deren Wahrscheinlichkeiten?

Aufgabe 3: (3P) Ein französischer Spieler und Hobby-Mathematiker namens Chevalier de Méré, der mit seinen Spielproblemen und deren Lösungen durch Pascal in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie eingegangen ist, wunderte sich einmal Pascal gegenüber, daß er beim Werfen mit drei Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen $(6, 4, 1)$, $(6, 3, 2)$, $(5, 5, 1)$, $(5, 4, 2)$, $(5, 3, 3)$, $(4, 4, 3)$ und die Augensumme 12 durch genauso viele Kombinationen (welche?) erzeugt würden. Welcher Fehler steckt in der Argumentation von de Méré?

Aufgabe 4: (4P) Sei $P: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ eine Abbildung, so daß $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für disjunkte $A, B \in 2^\Omega$ und $P(\Omega) = 1$.

- Zeigen Sie, daß $P(A^c) + P(A) = 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(A \setminus B) + P(A \cap B) = P(A)$ und $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ für alle $A, B \in 2^\Omega$. Folgern Sie, daß $P(A) \leq P(B)$ wenn $A \subset B$.
- Zeigen Sie durch Induktion $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n \in 2^\Omega$ und $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige $A_1, \dots, A_n \in 2^\Omega$ gilt $P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Abgabetermin: Mittwoch, 30. April 2003, vor Beginn der Vorlesung.