Universität des Saarlandes SS03
Fachbereich 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. G. Wittstock
Jörg Fischer, Zi. 223

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1: Man zeige, ist P ein diskretes W-Maß auf $\mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft

$$P(\{n+k\} \mid \{n, n+1, \dots\}) = P(\{k\}) \quad \text{für } k, n \in \mathbb{N}_0\,,$$

so ist P eine geometrische Verteilung $\mathcal{G}_p$ mit $(0 < p < 1)$.
D.h. eine im folgenden Sinne *„gedächtnislose"* Zufallsvariable X mit Werten in N_0:

$$P(X = n+k \mid X \geq n) = P(X = k) \quad \text{für } k, n \in \mathbb{N}_0\,,$$

ist geometrisch verteilt. Man interpretiere die Bedingung *„gedächtnislos"* am Beispiel des Würfelns einer 6.

Aufgabe 2 (Binomalapproximation der hypergeometrischen Verteilung): Es sei $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $\lim\limits_{N\to\infty} K_N/N = p \in]0,1[$. Dann strebt die hypergeometrische Verteilung $\mathcal{H}_{N,K_N,n}$ gegen die Binomialverteilung $\mathcal{B}_{n,p}$.
Hinweis: Man untersuche für $0 \leq k \leq n$ den Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(K_N)_k \cdot (N - K_N)_k}{N_n}.$$

Aufgabe 3: Das Genom der Taufliege Drosophila melanogaster gliedert sich in etwa $m = 7000$ Abschnitte (die anhand der Färbungsmuster der in den Speicheldrüsen befindlichen Riesenchromosomen erkennbar sind). Zur Vereinfachung sei angenommen, dass sich in jedem Abschnitt gleichviele, nämlich $n = 2300$ Basenpaare befinden. Das Genom umfasst also $1,61 \cdot 10^7$ Basenpaare. Durch hochenergetische Bestrahlung werden $K = 1000$ rein zufällig verteilte Basenpaare zerstört. Finden Sie ein stochastisches Modell für die Anzahl der zerstörten Basenpaare in einem Genomabschnitt. Berechnen Sie für den i-ten Abschnitt die Verteilung der Anzahl Z_i der zerstörten Basenpaare im i-ten Abschnitt und begründen Sie, dass Z_i approximativ $\mathcal{P}_\lambda$ (Poisson-verteilt) ist. Was ist λ?
Hinweis: Aufgabe 2.

Aufgabe 4: Erfahrungsgemäß fallen in einer Vordiplomsklausur 5% der Studierenden durch. In diesem Jahr nehmen 100 Studierende an der Klausur teil. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass $0, 1, \dots, 10$ Studierende durchfallen. Berechnen sie jeweils den exakten Wert und die Poisson-Approximation.

Aufgabe 5: Es seien P und Q W-Maße auf $\mathbb{N}_0$. Man setze $p_n := P\{n\}$, $q_n := Q\{n\}$ und definiere eine Folge durch

$$(p * q)_n := \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 .$$

Man nennt diese Folge die *Faltung* der Folgen $(p_n)_n$ und $(q_n)_n$.
Man zeige
a) Die Folge $\big((p * q)_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert ein diskretes W-Maß auf $\mathbb{N}_0$. Dieses W-Maß heißt die *Faltung* von P und Q und wird mit $P * Q$ bezeichnet.
b) Es seien $X, Y : (\Omega, P) \to \mathbb{N}_0$ unabhängige Zufallsvariable und P_X, P_Y ihre Bildverteilungen. Dann ist $P_X * P_Y = P_{X+Y}$.
c) Für die Poisson-Verteilung gilt $P_\lambda * P_\mu = P_{\lambda+\mu}$.
d) Es seien $X, Y : (\Omega, P) \to \mathbb{N}_0$ unabhängige Zufallsvariable. Ist X Poisson-verteilt mit dem Parameter λ und Y Poisson-verteilt mit dem Parameter μ, dann ist $X + Y$ Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda + \mu$.

Abgabetermin: Mittwoch, 2. Juli 2003, vor Beginn der Vorlesung.