Universität des Saarlandes SS03
Fachbereich 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. G. Wittstock
Jörg Fischer, Zi. 223

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1: Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig, identisch verteilt und Poisson-verteilt mit Parameter λ/n. Zeigen Sie, dass für die Zufallsvariablen

$$X := \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \text{ und } S_n := \sum_{\nu=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_\nu \geq 1\}}$$

gilt

$$0 < E(X) - E(S_n) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Zur Motivierung der Fragestellung siehe Vorlesungsskript Beispiel 2.4.5 und die darauf folgenden beiden Anmerkungen.
Hinweis: Exponentialreihe. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes zeige man die Abschätzung

$$0 \leq e^x - 1 \leq e^x x \quad \text{für } 0 \leq x.$$

Aufgabe 2: Die Zufallsvariablen X und Y seien die Anzahl der PKW und LKW, die am Tag die Westspange in Saarbrücken überqueren. Die Gesamtanzahl $Z = X + Y$ der PKW und LKW sei Poisson-verteilt mit Parameter λ.
Die Wahrscheinlichkeit für einen PKW sei p und für einen LKW $1 - p$. Man setze also die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = k \mid Z = n)$ als Binomialverteilung mit den Parametern n und p an.
Man zeige, X und Y sind unabhängig und Poisson-verteilt (mit welchen Parametern?).
Hinweis: Man berechne $P\big(\{X = k\} \cap \{Y = l\}\big)$ und wende Satz 1.9.3 (d) aus dem Vorlesungsskript an.

Aufgabe 3: a) Es sei $\Omega := [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Man zeige: Das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \{A \in 2^\Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}.$$

ist eine σ-Algebra und die Abbildung $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ definiert durch

$$P(A) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } A \text{ höchstens abzählbar,} \\ 1, & \text{wenn } A^c \text{ höchstens abzählbar,} \end{cases}$$

ist ein W-Maß.
b) Man zeige: i) $\mathcal{A} \neq 2^{\Omega}$. ii) Es gibt ein Mengensystem $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{A}$, dessen Vereinigung $\bigcup_{i\in I} A_i$ nicht in $\mathcal{A}$ liegt. *Hinweis*: Ω ist überabzählbar.
c) Gilt $P(A) = \sum_{a\in A} P(\{a\})$ für alle $A \in \mathcal{A}$?

Aufgabe 4: Die *„Wahrscheinlichkeit“* eines Teilintervalls $[a,b) \subset [0,1)$ sei seine Länge: $\mathcal{U}([a,b]) := b-a$. Die Fortsetzung auf die Borel-Algebra $\mathcal{B}([0,1])$ heißt die uniforme Verteilung $\mathcal{U}$ auf $[0,1]$.
Man zeige: Die Teilmengen

$$A_\nu := \Big[\frac{1}{2^\nu}, \frac{2}{2^\nu}\Big) \cup \Big[\frac{3}{2^\nu}, \frac{4}{2^\nu}\Big) \cup \cdots \cup \Big[\frac{2^\nu - 1}{2^\nu}, \frac{2^\nu}{2^\nu}\Big)$$

$(\nu = 1, \ldots, n)$, sind *„unabhängig“*. Dazu zeige man:
Für jede disjunkte Zerlegung $\{\nu_1, \ldots, \nu_k\} \,\dot\cup\, \{\mu_1, \ldots, \mu_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\mathcal{U}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_{\nu_i} \cap \bigcap_{j=1}^{n-k} A^c_{\mu_j}\Big) = 2^{-n} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{U}(A_{\nu_i}) \cdot \prod_{i=1}^{n-k} \mathcal{U}(A^c_{\mu_j})$$

Das Kriterium 1.10.2 des Skriptes kann nun sinngemäß angewandt werden, d.h., für endliche Teilmengen $\{\nu_1, \ldots, \nu_k\} \subset \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{U}\big(\bigcap_{i=1}^k A_{\nu_i}\big) = \prod_{i=1}^k \mathcal{U}(A_{\nu_i})$.

Aufgabe 5: Eine reelle Zufallsvariable X heißt *exponentialverteilt*, mit dem Parameter $\lambda > 0$, wenn ihre Verteilung die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

hat.
a) Man berechne die Verteilungsfunktion $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ von X.
b) Man zeige: Der Erwartungswert ist $E(X) = 1/\lambda$. *Hinweis*: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ und partielle Integration.
c) Man berechne $E(X^2) = 2/\lambda^2$ und $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$. *Hinweis*: Zweimal partiell integrieren.
d) Man berechne die sogenannte *momenterzeugende Funktion*

$$E(e^{tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{für } t < \lambda.$$

Differenziert man die obige Gleichung und vertauscht Integral und Ableitung so folgt

$$E(X) = \frac{d}{dt} E(e^{tX})|_{t=0} = \frac{1}{\lambda},$$
$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} E(e^{tX})|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Abgabetermin: Mittwoch, 9. Juli 2003, vor Beginn der Vorlesung.